СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Л. А. СКОРНЯКОВ

ДЕДЕКИНДОВЫ СТРУКТУРЫ С ДОПОЛНЕНИЯМИ И РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи математических наук»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

Л. А. СКОРНЯКОВ

ДЕДЕКИНДОВЫ СТРУКТУРЫ С ДОПОЛНЕНИЯМИ И РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Все в связи и взаимодействии». Нахождение частных проявлений этого общего закона, т. е. установление связей между различными явлениями, — одна из основных задач всякой науки. Поэтому всегда приятно, когда обнаруживаются глубокие связи между, на первый взгляд, совершенно разнородными математическими объектами. Одна из таких связей — связь между дедекиндовыми структурами с дополнениями и регулярными кольцами — вскрылась на стыке алгебры, геометрии и функционального анализа. Более подготовленный читатель может познакомиться с этой идеей подробнее, прочитав следующее ниже введение. Менее подготовленному придется начинать с основного текста, чтение которого формально не требует никакой предварительной подготовки. Все используемые понятия, кроме идеала кольца и частично упорядоченного множества, определяются. Доказательства, особенно на первых порах, проводятся весьма подробно. Ряд интересных результатов, не вошедших в основную линию изложения, формулируется в последнем параграфе. Там же формулируются некоторые проблемы.

Отдельные места настоящей работы были прочитаны В. А. Андрунакиевичем, К. К. Джансеитовым, Л. М. Киссиной, А. Г. Курошем, А. В. Михалевым и Т. С. Фофановой, сделавшими ряд ценных замечаний. Автор пользуется случаем искренне поблагодарить их.

Л. А. Скорняков

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что с каждой n-мерной проективной геометрией G, размерность которой $n \geqslant 3$, связывается некоторое ассоциативное тело K. При этом структура подпространств геометрии G оказывается изоморфной структуре линейных подпространств $(n+1)$-мерного линейного пространства над K. Так как всякая конечномерная дедекиндова структура с дополнениями изоморфна структуре подпространств некоторой проективной геометрии (Биркгоф [1], гл. VIII, § 3), то можно сказать, что конечномерная дедекиндова структура L с дополнениями координатизируется с помощью тела K. Обобщение этого результата может идти по двум направлениям. Во-первых, можно отказаться от конечномерности структуры L, но потребовать выполнения следующих условий: 1) L полна; 2) если a — ненулевой элемент из L, то существует атом $p \leqslant a$; 3) если p — атом и $p \leqslant \sum_{\alpha \in I} a_\alpha$, то найдется такое конечное подмножество Ξ множества I, что $p \leqslant \sum_{\alpha \in \Xi} a_\alpha$; 4) если p и q — различные атомы, то найдется такой атом $r \neq p, q$, что $r \leqslant p+q$. В этом случае также оказывается, что L изоморфна структуре подпространств линейного пространства над некоторым телом K (Бэр [1], гл. VIII). Однако это пространство не будет, вообще говоря, конечномерным. Можно пойти и по другому пути, потребовав, чтобы в рассматриваемой дедекиндовой структуре L с дополнениями существовал однородный базис ранга $n \geqslant 4$ (см. стр. 18). В n-мерной проективной геометрии в качестве такого однородного базиса можно взять любые $n+1$ точек, ни одна из которых не лежит в подпространстве, порожденном остальными. Структура также может быть координатизирована, но уже не с помощью тела, а с помощью регулярного кольца (см. стр. 82, теорема 10). Этот результат

Дж. Неймана (Neumann [4], [6]) неоднократно передоказывался (Kodaira, Furuya [1]; Maeda [5], [7]; Fryer, Halperin [1]—[3]). Однако эти доказательства в основном следуют схеме Неймана. Принципиально новый и существенно более простой метод доказательства предложил Амэмия (Amemiya [1]). На основе его статьи написаны §§ 3—4 настоящей работы. Связь между регулярными кольцами, координатизирующими одну и ту же структуру, исследуется в § 7. Результаты этого параграфа, за исключением теоремы 22, принадлежащей Нейману (Neumann [6]), являются оригинальными (Скорняков [1]). Как и в случае проективных пространств, можно рассматривать случай, когда ранг однородного базиса структуры равен трем. Фрайер и Гальперин (Fryer, Halperin [3]) накладывают на L ограничения, которые в случае проективной плоскости превращаются в теорему Дезарга, и получают теорему, вполне аналогичную теореме 10. В других работах (Fryer, Halperin [4]; Amemiya, Halperin [1]—[3]) на L накладываются ограничения, превращающиеся в случае плоскостей в малую теорему Дезарга (см., например, Скорняков Л. А., Проективные плоскости, Успехи матем. наук **6** (1951), № 6, 112—154, или Pickert G., Projektive Ebenen, Berlin, 1955). В этом случае L может быть координатизирована с помощью альтернативного регулярного кольца.

Исторические истоки упомянутой выше теории Неймана лежат, однако, не в проективной геометрии, а в теории линейных операторов гильбертова пространства. Классифицируя центральные[1]) слабо замкнутые подалгебры алгебры ограниченных линейных операторов (такие подалгебры названы факторами), Меррей и Нейман (Murray, Neumann [1]) установили[2]), что на проекциях фактора может быть определена функция размерности $D(P)$. При этом оказываются выполненными следующие свойства:

1. $D(P)=0$, если $P=0$; $D(P)>0$, если $P \neq 0$.

2. Если проекции P и Q эквивалентны[3]), то $D(P)= = D(Q)$.

---

[1]) Алгебра с единицей называется *центральной*, если ее центр совпадает с основным полем.

[2]) Обзор работ Меррея и Неймана можно найти у Наймарка [1], [2] или у Диксмье (Dixmier [2]).

[3]) Проекция фактора M считаются *эквивалентными*, если их пространства образов можно перевести одно в другое с помощью частично изометричного оператора из M,

3. $D(P) = \infty$ тогда и только тогда, когда P бесконечна[1]).

4. Если $PQ = 0$, то $D(P+Q) = D(P) + D(Q)$.

5. Если пространство образов проекции P является собственной частью пространства образов проекции Q и P конечна, то $D(P) < D(Q)$.

Выяснилось, что при надлежащем нормировании значения функции размерности могут заполнять одну из следующих областей:

I_n: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$;

I_∞: $1, 2, 3, \ldots$;

II_1: отрезок $[0, 1]$;

II_∞: отрезок $[0, \infty]$;

III: 0 и ∞.

Так возникают факторы типов I_n, I_∞, II_1, II_∞ и III. Было установлено, что проекции факторов типа I_n и II_1 образуют непрерывную геометрию (см. стр. 113). Нейман (Neumann [1], [6]) доказал, что функция размерности может быть определена на любой непрерывной геометрии, не разложимой в прямое произведение (см. теорему 19). В настоящей работе этот результат выводится в § 6 из нескольких более общих результатов § 5. В основу изложения этих параграфов положена IV глава книги Маеда (Maeda [7]). Исследования Гальперина (Halperin [1]—[3]) и ряда японских математиков (Iwamura [1], [2]; Kawada, Higuchi, Matsushima [1]; Maeda [2], [4], [6]) привели к обобщению результата Неймана (см. стр. 123). Лумис (Loomis [1]) построил теорию размерности для структур с дополнениями, в которых из $a \leqslant b$ вытекает $b = a + a'b$ (a' — ортодополнение элемента a). Еще более общие классы структур, в которых может быть введено понятие размерности, рассмотрел Маеда (Maeda [8], [9]). Интересное обобщение теории размерности предложил Фелдман (Feldman [1]). К этому же направлению принадлежит и работа Райта (Wright [2]).

Как было отмечено в начале введения, с факторами типов I_n и II_1 связаны регулярные кольца, которые оказываются даже $*$-регулярными кольцами (см. стр. 136). При

---

[1]) Проекция бесконечна, если она эквивалентна проекции, пространство образов которой является правильной частью пространства образов данной проекции.

этом множество проекций можно отождествить с множеством таких идемпотентов e, что $e^* = e$. Капланский (Kaplansky [4]) показал, что структура главных левых идеалов $*$-регулярного кольца является непрерывной геометрией, и вывел отсюда, что непрерывной геометрией является всякая полная дедекиндова структура с ортодополнениями. Эти результаты излагаются в §§ 7—8. Заметим, что в последнее время Амэмия и Гальперин (Amemiya, Halperin [4]) предложили чисто теоретико-структурное доказательство этого факта.

В последнем § 9 приводятся без доказательства некоторые результаты, не вошедшие в основную линию изложения, и формулируется несколько проблем.

§ 1. СТРУКТУРЫ

1. Основные определения и простейшие следствия. *Структурой* называется частично упорядоченное множество, любые два элемента a и b которого имеют наименьшую верхнюю грань (сумму) $a+b$ и наибольшую нижнюю грань (произведение) ab. Легко проверить, что обе введенные операции коммутативны, ассоциативны и удовлетворяют тождествам $a+a=a$ и $aa=a$. Непосредственно из определения вытекают также важные *законы поглощения*:

$$ab=b \text{ тогда и только тогда, когда } a \geqslant b \quad (\text{ПЗ1}),$$

$$a+b=b \text{ тогда и только тогда, когда } a \leqslant b \quad (\text{ПЗ2}).$$

Далее заметим, что из $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$ вытекает $a+c \geqslant b+d$ и $ac \geqslant bd$. Легко доказать также, что $a \leqslant c$ влечет $(a+b)c \geqslant a+bc$. Наименьший элемент структуры (если он есть) будем обозначать 0, а наибольший — 1. Легко понять, что множество элементов x, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant a$, образуют подструктуру. Условимся обозначать ее через L_a. Наконец, отображение φ структуры L в какую-либо структуру L' назовем *изоморфизмом*, если $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда $x \geqslant y$. Более подробно с основами теории структур можно ознакомиться по книге Биркгофа ([1], гл. II, §§ 1—4).

Структура называется *дедекиндовой*, если в ней справедлив *модулярный закон*:

$$\text{если } a \leqslant c, \text{ то } (a+b)c = a+bc \quad (\text{МЗ}).$$

С помощью ПЗ1 и МЗ нетрудно получить *закон сокращения*:

$$\text{если } (a+b)c=0, \text{ то } a(b+c)=ab. \quad (\text{СЗ})$$

Действительно, при выполнении условий этого закона будем иметь

$$a(b+c)=a(a+b)(b+c)=a[b+(a+b)c]=ab.$$

Во всякой дедекиндовой структуре справедлив также *закон неделимости*:

если $a+b=a+c$, $ab=ac$ *и* $b\leqslant c$, *то* $b=c$ (НЗ).

Доказательство опирается на ПЗ1, ПЗ2 и МЗ:

$$b=b+ab=b+ac=c(b+a)=c(a+c)=c.$$

Структура с 0 и 1 называется *структурой с дополнениями*, если для каждого элемента x найдется хотя бы один элемент y такой, что $x+y=1$, а $xy=0$. Элемент y называется *дополнением элемента* x. Если $x\leqslant a$, то дополнением x в a назовем такой элемент y, что $x+y=a$, а $xy=0$. Имеет место следующий факт:

Предложение 1. *Если x и a — такие элементы дедекиндовой структуры с дополнениями, что $x\leqslant a$, а y — дополнение элемента x, то $z=ay$ является дополнением x в a.*

Действительно, из $0\leqslant xz\leqslant xy=0$ вытекает $xz=0$. С другой стороны, применяя МЗ, получим $x+z=x+ay=$ $=a(x+y)=a\cdot 1=a$, что и доказывает наше утверждение.

В дальнейшем мы будем рассматривать только дедекиндовы структуры с дополнениями, не оговаривая этого особо. Отметим, что предложения 2, 3, 4 и 7—11 справедливы во всякой дедекиндовой структуре.

2. Независимость. Элементы $x_1, \ldots, x_n$ называются *независимыми*, если $x_i \sum\limits_{k\neq i} x_k=0$ для каждого i.

Предложение 2. *Если $(x_1+\ldots+x_l)\,x_{l+1}=0$ для каждого l, то элементы $x_1, \ldots, x_n$ независимы.*

Доказательство. Будем доказывать справедливость соотношения

$$x_j(x_1+\ldots+x_{j-1}+x_{j+1}+\ldots+x_l)=0 \qquad (1)$$

при фиксированном j. При $l\leqslant j-1$ равенство (1) справедливо по условию. Так как $[x_j+(x_1+\ldots+x_{j-1}+x_{j+1}+\ldots$ $\ldots+x_{l-1})]\,x_l=0$, то, применяя СЗ и индуктивное предположение, получим

$$x_j[(x_1+\ldots+x_{j-1}+x_{j+1}+\ldots+x_{l-1})+x_l]=$$
$$=x_j(x_1+\ldots+x_{j-1}+x_{j+1}+\ldots+x_{l-1})=0.$$

Поскольку справедливость равенства (1) для $l=n$ равносильна заключению предложения, то все доказано.

Предложение 3. *Если* $x_1, \ldots, x_n$ *независимы, а* I *и* J — *подмножества множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *то*

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)=\begin{cases} 0, \text{ если } I\cap J \text{ пусто;} \\ \sum\limits_{k\in I\cap J} x_k \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. Положим $K=I\cap J$. Если K пусто, а I состоит из одного элемента, то справедливость предложения сразу следует из определения независимости. Если в I больше одного элемента, то, применяя СЗ, будем иметь

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)=\Big(\sum_{i\in I\setminus x_{i_0}} x_i+x_{i_0}\Big)\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)=x_{i_0}\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)=0,$$

ибо $\Big(\sum\limits_{i\in J} x_j+x_{i_0}\Big)\Big(\sum\limits_{i\in I/x_{i_0}} x_i\Big)=0$ по индуктивному предположению. Теперь допустим, что K не пусто, и положим $I'=I\setminus K$. Если I' пусто, то справедливость предложения вытекает из ПЗ1. Если же I' не пусто, то, применяя МЗ и учитывая, что $I'\cap J$ пусто, будем иметь

$$\Big(\sum_{k\in I} x_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)=\Big(\sum_{k\in K} x_k+\sum_{i\in I'} x_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)=$$
$$=\sum_{k\in K} x_k+\Big(\sum_{i\in I'} x_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)=\sum_{k\in K} x_k.$$

Если $x_1, \ldots, x_n$ независимы, то условимся писать $x_1\dot{+}\ldots\dot{+}x_n$ вместо $x_1+\ldots+x_n$. В частности, $x+y$ можно заменить на $x\dot{+}y$, если $xy=0$.

Предложение 4. *Если элементы* $x_1, \ldots, x_l$ *независимы и* $x_i=x_{i1}\dot{+}\ldots\dot{+}x_{ik_i}$, $i=1, \ldots, l$, *то элементы* $x_{11}, \ldots, x_{1k_1}, \ldots, x_{l1}, \ldots, x_{lk_l}$ *также независимы.*

Доказательство. При $l=1$ предложение очевидно. Если оно верно для $(l-1)$, то ввиду предложения 2 достаточно показать, что $(x_1+\ldots+x_{l-1}+x_{l1}+\ldots+x_{ls-1})\,x_{ls}=0$ для каждого s. Но это равенство легко получить, учитывая СЗ, предложение 2 и соотношение $(x_1+\ldots+x_{l-1})\times\times(x_{l1}+\ldots+x_{ls})\leqslant(x_1+\ldots+x_{l-1})\,x_l=0$.

3. Перспективность. Элементы a и b называются *перспективными* (в обозначениях $a\sim b$), если существует такой элемент c, что $a \dotplus c = b \dotplus c$. Этот элемент c называется *осью перспективы*[1]).

Предложение 5. *Для элементов a и b следующие свойства оказываются эквивалентными*:

а) *a и b имеют общее дополнение*;

б) *a и b имеют общее дополнение в любом $d \geqslant a+b$*;

в) *a и b имеют общее дополнение в некотором $d \geqslant a+b$*;

г) *a и b перспективны.*

Доказательство. Ввиду предложения 1 из а) вытекает б). Справедливость в) при выполнении б) и г) при выполнении в) очевидна. Так что допустим, что имеет место г). Пусть x — дополнение элемента $a \dotplus c = b \dotplus c$. Согласно предложению 4, $a \dotplus (x \dotplus c) = 1 = b \dotplus (x \dotplus c)$, т. е. $x+c$ оказывается общим дополнением a и b. Таким образом, свойство а) вытекает из г).

Предложение 6. *Если $a+d=b+d$ и $ad=bd$, то для элементов a и b существует ось перспективы c такая, что $c \leqslant d$.*

Доказательство. Так как $ad \leqslant d$, то из предложения 1 вытекает существование элемента c, являющегося дополнением ad в d. Применяя законы поглощения, будем иметь

$$a+c=a+ad+c=a+d=b+d=b+bd+c=b+c,$$

$$ac=(ad)\,c=0=(bd)\,c=bc.$$

Этим показано, что c является искомой осью перспективы.

Предложение 7. *Если c — ось перспективы элементов a и b, то отображения $x \to (x+c)\,b$ и $y \to (y+c)\,a$ являются взаимно обратными изоморфизмами структуры L_a на L_b и L_b на L_a соответственно.*

Для доказательства достаточно установить, что указанные отображения являются взаимно обратными. Но если, например, $x \leqslant a$, то, применяя МЗ и ПЗ1, будем иметь

$$[(x+c)\,b+c]\,a=(x+c)(b+c)\,a=$$
$$=(x+c)(a+c)\,a=(x+c)\,a=x+ca=x.$$

Изоморфизм L_a на L_b, указанный в предложении 7, назовем *перспективой a на b с осью c* и будем обозначать $P_{(a \to b;\ c)}$.

[1]) Используя доказанное ниже предложение 5, нетрудно установить, что два подпространства конечномерного проективного пространства перспективны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Предложение 8. *Элементы* $x \leqslant a$ *и* $y = P_{(a \to b;\, c)}(x)$ *перспективны, причем осью перспективы служит элемент* c.

Действительно, применяя М3 и П31, получаем

$$y \dotplus c = (x + c)\,b + c = (x + c)(b + c) = \\ = (x + c)(a + c) = x \dotplus c.$$

Предложение 9. *Если элемент* c *служит осью перспективы элементов* a *и* b, *а элемент* $d \geqslant c$ *таков, что* $ad = bd = 0$, *то* $P_{(a \to b;\, c)} = P_{(a \to b;\, d)}$.

Доказательство. Так как, применяя П32, получаем

$$a \dotplus d = a \dotplus c \dotplus d = b \dotplus c \dotplus d = b \dotplus d,$$

то d оказывается осью перспективы элементов a и b. Далее, ввиду М3 и П31, для каждого $x \leqslant a$ имеем

$$P_{(b \to a;\, c)} P_{(a \to b;\, d)}(x) = [(x + d)\,b + c]\,a = \\ = (x + d)(b + c)\,a = (x + d)(a + c)\,a = (x + d)\,a = x + da = x.$$

Отсюда и из предложения 7 вытекает справедливость нашего утверждения.

Предложение 10. *Если изоморфизм* ψ *структуры* L_{a+b+c} *на* $L_{\psi(a+b+c)}$ *оставляет на месте элемент* c, *то* $P_{(\psi(a) \to \psi(b);\, c)} = \psi P_{(a \to b;\, c)} \psi^{-1}$.

Для доказательства, ввиду предложения 7, достаточно установить, что $\varphi = P_{(\psi(b) \to \psi(a);\, c)} \psi P_{(a \to b;\, c)} \psi^{-1}$ является тождественным отображением $L_{\psi(a)}$ на себя. Но если $y \leqslant \psi(a)$, то $y = \psi(x)$, где $x \leqslant a$. Отсюда

$$\varphi(y) = \left[\psi P_{(a \to b;\, c)} \psi^{-1}(y) + c\right] \psi(a) = \\ = \psi\left([P_{(a \to b;\, c)}(x) + c]\,a\right) = \psi(x) = y,$$

что и требовалось.

Предложение 11. *Если* $x \leqslant ab$, *то* $P_{(a \to b;\, c)}(x) = x$.

Действительно, применяя М3, получим

$$P_{(a \to b;\, c)}(x) = (x + c)\,b = x + cb = x.$$

Предложение 12. *Если* $a \sim b$, $b \sim c$ *и* $(a + b)\,c = 0$, *то* $a \sim c$.

Доказательство. Так как $a \sim b$ и $b \sim c$, то согласно предложению 5 найдутся такие u и v, что $a \dotplus u = a + b = b \dotplus u$ и $b \dotplus v = b + c = c \dotplus v$. Тогда

$$a + (u + v) = a + b + c = c + (u + v).$$

С другой стороны, применяя ПЗ1 и М3, будем иметь

$$(a+u)v=(a+b)v(b+c)=[b+(a+b)c]v=bv=0.$$

Ввиду С3, отсюда следует, что $a(u+v)=au=0$. Аналогично проверяется равенство $c(u+v)=0$. Этим показано, что $u+v$ является осью перспективы для a и c.

Скажем, что структура *обладает однородным базисом ранга* n, если $1=a_1\dotplus \ldots \dotplus a_n$, причем $a_i \sim a_j$ при любых i и j.

§ 2. РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА

4. Основные свойства. Ассоциативное кольцо R с единицей называется *регулярным*, если уравнение $\alpha\xi\alpha=\alpha$ разрешимо в R для любого $\alpha\in R$. Регулярными кольцами являются тела и прямые суммы тел. Большие возможности для получения примеров регулярных колец открывает доказываемая ниже теорема 3.

Теорема 1. *Следующие свойства ассоциативного кольца R с единицей эквивалентны*:

а) *R регулярно*;

б) *всякий главный левый идеал кольца R совпадает с главным левым идеалом, порождаемым идемпотентом*;

в) *правосторонний аналог свойства* б);

г) *главные левые идеалы кольца R образуют подструктуру с дополнениями в структуре всех левых идеалов* [1]);

д) *правосторонний аналог свойства* г);

е) *всякий главный левый идеал кольца R обладает дополнением в структуре всех левых идеалов*;

ж) *правосторонний аналог свойства* е) [2]).

Доказательство. Сначала покажем, что свойства а) и б) равносильны. Пусть выполнено а) и $R\alpha$ — главный левый идеал. Если β таково, что $\alpha\beta\alpha=\alpha$, то $(\beta\alpha)^2=\beta(\alpha\beta\alpha)=\beta\alpha$, т. е. $\beta\alpha$ — идемпотент. Так как $\alpha=\alpha(\beta\alpha)\in R(\beta\alpha)$, то $R\alpha\subset R(\beta\alpha)$. Поскольку обратное включение очевидно, спра-

---

[1]) Как левые, так и правые идеалы всякого кольца образуют дедекиндову структуру относительно теоретико-множественного включения. Доказательство полностью совпадает с доказательством соответствующих теорем для нормальных делителей (Биркгоф [1], стр. 103) или для подпространств (Бэр [1], стр. 20—21).

[2]) Neumann [3], [6]. См. также Fryer, Halperin [3]; Munn, Penrose [1].

ведливость условия б) доказана. Теперь допустим, что имеет место б) и дано уравнение $\alpha\xi\alpha=\alpha$. Найдем такой идемпотент e, что $Re=R\alpha$. Тогда для подходящих $\beta,\ \gamma\in R$ справедливы равенства $\alpha=\beta e$ и $e=\gamma\alpha$. Отсюда $\alpha\gamma\alpha=\alpha e=\beta ee=\beta e=\alpha$, т. е. γ оказывается корнем заданного уравнения.

Вполне аналогично проверяется эквивалентность а) и в).

Теперь покажем, что г) вытекает из б) и в). Так как структура левых идеалов дедекиндова, то для этого достаточно установить, что для любых идемпотентов e и f имеют место следующие утверждения:

(I) $Re+Rf=R(e+g)$, где g — такой идемпотент, что $Rg=R(f-fe)$.

(II) $Re\cap Rf=R(f-gf)$, где g — такой идемпотент, что $gR=(f-fe)R$.

(III) $R(1-e)$ служит дополнением идеала Re.

Доказательство (I). Так как $g=\alpha(f-fe)$, то $ge=0$. Отсюда $e=(e+g)-g(e+g)\in R(e+g)$. Учитывая этот результат и соотношение $f-fe=(f-fe)g$ [1], получим $f=fe+(f-fe)g+(f-fe)e=fe+(f-fe)(g+e)\in\in R(e+g)$. Следовательно, $Re+Rf\subset R(e+g)$. С другой стороны, $e+g=e+\alpha(f-fe)=(e-\alpha f)e+\alpha f\subset Re+Rf$. Таким образом, $Re+Rf=R(e+g)$.

Доказательство (II). Так как $f-gf=(f-g)f$ и $f-gf=(f-fe)+(fe-gf)=g(f-fe)+(fe-gf)=(f-gf)e$, то $R(f-gf)\subset Rf\cap Re$. С другой стороны, если $x\in Rf\cap Re$, т. е. $x=xf=xe$, то, ввиду $g=(f-fe)\beta$, имеем

$$x=x-(x-x)\beta f=x-x(f-fe)\beta f=x-xgf=x(f-gf).$$

Этим показано, что $Rf\cap Re\subset R(f-gf)$.

Доказательство (III). Так как $1=(1-e)+e$, то $R=R(1-e)+Re$. Если $x\in R(1-e)\cap Re$, то $x=\alpha(1-e)=\beta e$ для подходящих $\alpha,\ \beta\in R$. Умножая справа на e, получим $x=0=\beta ee$, т. е. $Re\cap R(1-e)=0$.

Таким же путем устанавливается, что д) вытекает из б) и в).

Факт, что е) вытекает из г), а ж) — из д), является очевидным.

Допустим, что кольцо R обладает свойством е) и в нем задано уравнение $\alpha\xi\alpha=\alpha$. Пусть I — дополнение идеала $R\alpha$ в структуре всех левых идеалов. Тогда $1=\beta\alpha+\gamma$, где $\beta\in R$,

[1]) Если e — идемпотент и $x\in Re$, т. е. $x=\lambda e$, то $xe=\lambda e^2=x$.

$\gamma \in I$. Умножив слева на α, получим равенство $\alpha = \alpha\beta\alpha + \alpha\gamma$. Так как $\alpha\gamma = (1 - \alpha\beta)\alpha \in R\alpha \cap I$, то $\alpha\gamma = 0$. Следовательно, β является корнем заданного уравнения и, значит, кольцо R регулярно.

Аналогично проверяется, что а) вытекает и из ж).

Пусть R — регулярное кольцо. Структуру главных левых идеалов этого кольца условимся обозначать через $\mathfrak{L}(R)$. Если $M \subset R$, то через $M^l\,[M^r]$ обозначим совокупность таких элементов $\mu \in R$, что $\mu\xi = 0$ $[\xi\mu = 0]$ для всех $\xi \in M$.

Предложение 13. *Пусть R — регулярное кольцо. Тогда*:

а) *Если* $R\alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} R\alpha_n = R$ [1]), *то существует единственный набор идемпотентов* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *таких, что* $R\varepsilon_i = R\alpha_i$, $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 1$, $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ *при* $i \neq j$;

б) *если* $\varepsilon^2 = \varepsilon$, *то* $(R\varepsilon)^r = (1 - \varepsilon)R$ *и* $(\varepsilon R)^l = R(1 - \varepsilon)$;

в) $(R\alpha)^{rl} = R\alpha$;

г) $(\alpha R)^{lr} = \alpha R$;

д) *если* $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\delta^2 = \delta$, $S \in \mathfrak{L}(R)$, $R\varepsilon \dot{+} S = R\varepsilon + R\delta$, *то* $S = R(\delta - \alpha)$, *где* $\alpha \in \delta R\varepsilon$. *Если, кроме того,* $\beta \in R\varepsilon$ *и* $\delta - \beta \in S$, *то* $\beta = \alpha$;

е) *отображение* $R\alpha \to (R\alpha)^r$ $[\alpha R \to (\alpha R)^l]$ *является антиизоморфизмом структуры главных левых [правых] идеалов кольца* R *на структуру его главных правых [левых] идеалов*;

ж) *если* $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\delta^2 = \delta$, $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$ *и* $R\varepsilon \sim R\delta$, *то найдутся такие* $\alpha \in \varepsilon R\delta$ *и* $\beta \in \delta R\varepsilon$, *что* $R(\varepsilon - \alpha) = R(\delta - \beta)$; *при этом* $\varepsilon = \alpha\beta$, *а* $\delta = \beta\alpha$;

з) *если* $\varepsilon^2 = \varepsilon$ *и* $R\varepsilon$ — *правый идеал, то* ε — *центральный элемент* [2]).

Доказательство. а) Пусть $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 1$, где $\varepsilon_i \in R\alpha_i$. Тогда

$$\varepsilon_i - \varepsilon_i^2 = \sum_{k \neq i} \varepsilon_i\varepsilon_k \in R\alpha_i \cap \sum_{k \neq i} R\alpha_k = 0,$$

т. е. ε_i — идемпотент. Поэтому при $i \neq j$ имеем

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = -\sum_{k \neq i, j} \varepsilon_i\varepsilon_k \in R\alpha_j \cap \sum_{k \neq i, j} R\alpha_k = 0.$$

---

[1]) Точки над плюсами означают, что $R\alpha_1, \ldots, R\alpha_n$ независимы как элементы структуры $\mathfrak{L}(R)$.

[2]) Центральным элементом называется элемент, перестановочный со всеми элементами кольца.

Наконец,

$$\alpha_i - \alpha_i\varepsilon_i = \sum_{k\neq i} \alpha_i\varepsilon_k \in R\alpha_i \cap \sum_{k\neq i} R\alpha_k = 0,$$

т. е. $\alpha_i \in R\varepsilon_i$, откуда $R\alpha_i = R\varepsilon_i$. В заключение допустим, что $\delta_1 + \ldots + \delta_n = 1$ и $R\delta_i = R\alpha_i$. Тогда $\varepsilon_i - \delta_i = \varepsilon_i - \delta_i\varepsilon_i = = \sum_{k\neq i} \delta_k\varepsilon_i = \sum_{k\neq i} \delta_k\varepsilon_k\varepsilon_i = 0$, т. е. $\varepsilon_i = \delta_i$.

б) Ясно, что $(1-\varepsilon)R \subset (R\varepsilon)^r$. Если $\xi \in (R\varepsilon)^r$, то $\varepsilon\xi = 0$. Отсюда $\xi = \xi - \varepsilon\xi = (1-\varepsilon)\xi \in (1-\varepsilon)R$. Второе утверждение доказывается аналогично.

в) Ввиду теоремы 1, $R\alpha = R\varepsilon$, где $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Применяя б), будем иметь

$$(R\alpha)^{rl} = (R\varepsilon)^{rl} = [(1-\varepsilon)R]^l = R\varepsilon = R\alpha.$$

Справедливость г) проверяется аналогично.

д) Так как $\delta \in R\varepsilon + S$, то $\delta = \lambda\varepsilon + \sigma$, где $\lambda \in R$, $\sigma \in S$. Отсюда $\delta = \delta\lambda\varepsilon + \delta\sigma$.

Пусть $\alpha = \delta\lambda\varepsilon$, тогда $\delta - \alpha = \delta\sigma \in S$, т. е.

$$R(\delta - \alpha) \subset S.$$

Если $\tau \in S$, то $\tau = \xi\varepsilon + \eta\delta$, где $\xi, \eta \in R$. Отсюда

$$\tau = \xi\varepsilon + \eta\alpha + \eta\,\delta\sigma,$$

или

$$\tau - \eta\,\delta\sigma = \xi\varepsilon + \eta\alpha \in S \cap R\varepsilon = 0.$$

Следовательно, $\tau = \eta\,\delta\sigma = \eta(\delta - \alpha)$, т. е.

$$S \subset R(\delta - \alpha).$$

Если $\delta - \beta \in S$, то

$$\alpha - \beta = (\delta - \beta) - (\delta - \alpha) \in S \cap R\varepsilon = 0,$$

т. е. $\alpha = \beta$.

е) Ясно, что $(R\alpha + R\beta)^r = (R\alpha)^r \cap (R\beta)^r$, $(\alpha R + \beta R)^l = = (\alpha R)^l \cap (\beta R)^l$. Отсюда, учитывая б), в) и г), получаем:

$$(R\alpha \cap R\beta)^r = [(R\alpha)^{rl} \cap (R\beta)^{rl}]^r = [(R\alpha)^r + (R\beta)^r]^{lr} = (R\alpha)^r + (R\beta)^r.$$

Так же проверяется, что $(\alpha R \cap \beta R)^l = (\alpha R)^l + (\beta R)^l$. Взаимная однозначность отображений следует из в) и г).

ж) Ввиду предложения 5, найдется такой идеал $S \in \mathfrak{L}(R)$, что

$$R\varepsilon \dotplus S = R\varepsilon + R\delta = R\delta \dotplus S.$$

Свойство д) позволяет отыскать такие $\alpha \in \varepsilon R\delta$ и $\beta \in \delta R\varepsilon$, что $R(\varepsilon - \alpha) = S = R(\delta - \beta)$.

Если $\varepsilon - \alpha = \lambda(\delta - \beta)$, то $(\varepsilon - \alpha)\delta = \lambda(\delta - \beta)\delta$, откуда $-\alpha = \lambda\delta$. Поэтому

$$\varepsilon - \alpha = \lambda(\delta - \beta) = \lambda\delta(\delta - \beta) = -\alpha(\delta - \beta) = -\alpha + \alpha\beta,$$

и значит, $\varepsilon = \alpha\beta$. Аналогично проверяется, что $\delta = \beta\alpha$.

з) Поскольку $R\varepsilon$ — правый идеал, то $\varepsilon R \subset R\varepsilon$. Пусть $\xi \in R\varepsilon$. Ввиду теоремы 1, $\xi R + \varepsilon R = \delta R$, где $\delta^2 = \delta$. Так как $R\varepsilon$ — правый идеал, то $\delta R \subset R\varepsilon$, т. е. $\delta\varepsilon = \delta$. С другой стороны, $\varepsilon R \subset \delta R$, откуда $\delta\varepsilon = \varepsilon$. Следовательно, $\delta = \varepsilon$, а значит, $R\varepsilon \subset \varepsilon R$. Таким образом, $R\varepsilon = \varepsilon R = \varepsilon R\varepsilon$. Поэтому для всякого $\eta \in R$ имеем $\eta\varepsilon = \varepsilon\eta\varepsilon = \varepsilon\eta$.

5. Модули и матрицы. Если R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, то через R_n и R^n будем обозначать соответственно кольцо матриц порядка n над кольцом R и левый модуль n-мерных строк над кольцом R. Подмодуль M модуля R^n назовем *модулем конечного происхождения*, если существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_m \in M$, что всякий элемент из M представляется в форме

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m,$$

где $\alpha_i \in R$. Так как в R есть единица, то сам модуль R^n является модулем конечного происхождения, поскольку любой элемент из R представляется в форме

$$\alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 1).$$

Левый идеал кольца R, порождаемый конечным числом элементов, назовем *идеалом конечного происхождения*.

Если M — подмодуль модуля R^n, то обозначим через $\varphi(M)$ совокупность матриц из R_n, строками которых служат строки, принадлежащие M. Если I — левый идеал кольца R_n, то обозначим через $\psi(I)$ множество строк из R_n, служащих строками матриц из I.

Предложение 14. *Отображение φ является изоморфизмом структуры $\mathfrak{A}$ подмодулей модуля R^n на структуру $\mathfrak{B}$ левых идеалов кольца R_n* [1]. *Отображение ψ — изоморфизм структуры $\mathfrak{B}$ на структуру $\mathfrak{A}$. При этом $\varphi = \psi^{-1}$, а модули и идеалы конечного происхождения соответствуют друг другу.*

---

[1]) Обе эти структуры дедекиндовы (см. примечание [1]) на стр. 18).

Простой подсчет доказывает, что верны следующие предложения:

Лемма 1. *Если X, $A \in R_n$, то строки матрицы XA являются линейными комбинациями (с коэффициентами из R) строк матрицы A.*

Лемма 2. *Если $\lambda \in R$, а $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ служит i-й строкой матрицы $A \in I \in \mathfrak{B}$, то для всякого j в I найдется такая матрица B, что все ее строки, кроме j-й, являются нулевыми, а j-я строка совпадает с λa.*

Для доказательства заметим, что в качестве B можно взять матрицу $(\gamma_{kl}) A$, где

$$\gamma_{kl} = \begin{cases} \lambda, & \text{если } k = j,\ l = i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Приступим к доказательству предложения 14. Если $M \in \mathfrak{A}$, то из A, $B \in \varphi(M)$, очевидно, следует $A - B \in \varphi(M)$, а лемма 1 позволяет получить $XA \in \varphi(M)$ для любого $X \in R_n$. Следовательно, $\varphi(M) \in \mathfrak{B}$. С помощью леммы 2 легко установить, что $\psi(I) \in \mathfrak{A}$. Из определения φ и ψ вытекает, что $\varphi\psi(I) = I$ (учесть лемму 2), $\psi\varphi(M) = M$, $M_1 \leqslant M_2$ влечет $\varphi(M_1) \leqslant \varphi(M_2)$, а $I_1 \leqslant I_2 - \psi(I_1) \leqslant \psi(I_2)$. Остается доказать последнее утверждение предложения.

Если $M = Ra_1 + \ldots + Ra_m \in \mathfrak{A}$, то обозначим через A_{kl} матрицу, у которой k-я строка совпадает с a_l, а остальные строки нулевые. Ясно, что $A_{kl} \in \varphi(M)$. Если $X \in \varphi(M)$, то $X = X_1 + \ldots + X_n$, где X_i — матрица, у которой i-я строка совпадает с i-й строкой матрицы X, а остальные строки нулевые. Так как X_i линейно выражается через $A_{i1}, \ldots, A_{in}$, то приходим к $\varphi(M) = \sum_{k,l} R_n A_{kl}$. Следовательно, $\varphi(M)$ оказывается идеалом конечного происхождения. Если, наоборот, $I = R_n A_1 + \ldots + R_n A_m$, то из леммы 1 вытекает, что $\psi(I)$ порождается строками матриц $A_1, \ldots, A_m$, т. е. является модулем конечного происхождения.

Непосредственно из предложения 14 вытекает

Теорема 2. *Для всякого ассоциативного кольца R с единицей структура всех подмодулей модуля R^n изоморфна структуре всех левых идеалов кольца R_n. При этом изоморфизме совокупность модулей конечного происхождения отображается на совокупность всех левых идеалов конечного происхождения* [1]).

---

[1]) Neumann [6]; Ree [1].

Теорема 3. *Кольцо R_n регулярно в том и только в том случае, когда регулярно кольцо R* [1]).

Сначала докажем:

Лемма. *Если кольцо R регулярно, то всякий модуль конечного происхождения имеет дополнение в структуре всех подмодулей модуля R^n.*

Доказательство будем вести индукцией по n. Если $n=1$, то модули конечного происхождения являются левыми идеалами, представимыми в виде суммы конечного числа главных левых идеалов, т. е., согласно свойству г) теоремы 1, — главными левыми идеалами. Поэтому лемма является следствием свойства е) теоремы 1.

Допустим теперь, что лемма доказана для R^{n-1} и M — модуль конечного происхождения в R^n. Тогда

$$M = Ra_1 + \ldots + Ra_m,$$

где $a_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$. Ввиду теоремы 1, найдется такой идемпотент ε, что

$$R\alpha_{11} + \ldots + R\alpha_{m1} = R\varepsilon.$$

Если $\varepsilon = \sum \lambda_k \alpha_{k1}$, то, положив $c = \varepsilon \sum \lambda_k a_k$, будем иметь $c = (\varepsilon, \ldots)$ и $c = \varepsilon c$. Если, далее, $\alpha_{k1} = \mu_k \varepsilon$, $k = 1, \ldots, m$, то положим $b_k = a_k - \mu_k c$, $k = 1, \ldots, m$. Ясно, что $b_k = (0, \ldots)$. Положим $M' = \sum Rb_k$. Если $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in M$, то $\xi_1 = \nu\varepsilon$ для некоторого $\nu \in R$ и

$$x - \nu c = (0, \ldots) = \eta c + \sum \eta_k b_k.$$

Отсюда $\eta\varepsilon = 0$, а значит, и $\eta c = 0$. Таким образом, $x - \nu c \in M'$, т. е. $M = Rc + M'$. Так как M' можно рассматривать как подмодуль модуля R^{n-1}, то в силу индуктивного предположения для него существует дополнение N'. Положим $N = Rd + N'$, где $d = (1 - \varepsilon, 0, \ldots, 0)$.

Если $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$, то

$$x - \xi_1 c - \xi_1 d = (0, \ldots) \in M' + N',$$

т. е. $x \in M + N$. Следовательно, $R^n = M + N$. Соотношение $M \cap N = 0$ является следствием равенств $Rc \cap Rd = M' \cap N' = (Rc + Rd) \cap (M' + N') = 0$, предложений 3 и 4, теоремы 1 и теоремы 2.

Приступим к доказательству теоремы. Если R — регулярное кольцо, то, согласно лемме, каждый модуль конечного

[1]) Neumann [6]; Kodaira, Furuya [1]; Brown, McCoy [1].

происхождения в R^n имеет дополнение. Ввиду теоремы 2, отсюда следует, что каждый главный левый идеал кольца R_n имеет дополнение в структуре всех левых идеалов кольца R_n. Применив теорему 1, убедимся в регулярности кольца R_n. Пусть теперь регулярным является кольцо R_n и в R дано уравнение $\alpha\xi\alpha = \alpha$. Из теорем 1 и 2 вытекает, что подмодуль $R(\alpha, \ldots, \alpha)$ модуля R^n имеет дополнение M. Тогда

$$(1, \ldots, 1) = (\beta\alpha, \ldots, \beta\alpha) + (\gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

где $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in M$. Умножая это равенство слева на α, получим

$$(\alpha, \ldots, \alpha) = (\alpha\beta\alpha, \ldots, \alpha\beta\alpha) + (\alpha\gamma_1, \ldots, \alpha\gamma_n).$$

Так как $(\alpha\gamma_1, \ldots, \alpha\gamma_n) = (1 - \alpha\beta)(\alpha, \ldots, \alpha) \in R(\alpha, \ldots, \alpha) \cap M$, то $\alpha\gamma_i = 0$ для всех i. Значит, β является корнем заданного уравнения, что и доказывает регулярность кольца R.

6. Первая основная теорема.

Теорема 4. *Если R — регулярное кольцо, то модули конечного происхождения модуля R^n образуют подструктуру $\mathfrak{L}(R^n)$ с дополнениями в структуре всех подмодулей модуля R^n. Элементы $E_1 = R(1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = R(0, 1, \ldots, 0), \ldots, E_n = R(0, 0, \ldots, 1)$ образуют однородный базис структуры $\mathfrak{L}(R^n)$* [1].

Доказательство. Первое утверждение теоремы сразу следует из теорем 2, 3 и 1. Независимость элементов $E_1, \ldots, E_n$ очевидна. Так как $R(1, 1, 0, \ldots, 0)$ является общим дополнением E_1 и E_2 в $E_1 + E_2$, то $E_1 \sim E_2$. Аналогично проверяется наличие остальных перспектив.

§ 3. НОРМАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ

7. Определение и простейшие свойства. Автоморфизм f структуры L называется *нормальным* относительно $s \in L$, если он оставляет неподвижными все элементы структуры, сравнимые с s, и если существует элемент $\omega(f) \leqslant s$ такой, что $[x + f(x)]\,s = \omega(f)$ для всякого дополнения x элемента s. Элемент $\omega(f)$ называется *осью автоморфизма f*.

Задачей настоящего параграфа является доказательство существования достаточно большого набора автоморфизмов, нормальных относительно данного элемента s.

Непосредственно из определения следует

[1]) Neumann [4], [6]; Amemiya [1].

Предложение 15. *Если f — автоморфизм, нормальный относительно s, то x и $f(x)$ являются дополнениями элемента s одновременно.*

Введем некоторые обозначения:

$$S = \{x;\ xs = 0\}\ ^{1)},$$

$$S_a = \{x;\ x \dotplus s = a + s \text{ для некоторого } a \in L\},$$

$$D(s) = \{x;\ x \text{ — дополнение элемента } s\}.$$

Ясно, что $S_a \subset S$, а $D(s) = S_a$ для всякого $a \in D(s)$.

Предложение 16. *Если $x \in D(s)$, то*

$$x + \omega(f) = f(x) + \omega(f) = x + f(x).$$

Доказательство. Применяя МЗ, получим

$$x + \omega(f) = x + [x + f(x)]\, s = [x + f(x)](x + s) = x + f(x).$$

Равенство $f(x) + \omega(f) = x + f(x)$ проверяется аналогично.

Предложение 17. *Если автоморфизмы f, f', f'' и $f'f''$ нормальны относительно s, то f^{-1} также нормален, $\omega(f^{-1}) = \omega(f)$ и*

$$\omega(f'f'') \leqslant \omega(f') + \omega(f'').$$

Доказательство. Пусть $x \in D(s)$. Тогда

$$f\left(\left[x + f^{-1}(x)\right] s\right) = [f(x) + x]\, s = \omega(f) \leqslant s,$$

откуда

$$\omega(f) = f^{-1}(\omega(f)) = \left[x + f^{-1}(x)\right] s = \omega\left(f^{-1}\right).$$

Далее, применяя МЗ и предложения 15 и 16, получим

$$\omega(f'f'') = [f'f''(x) + x]\, s \leqslant [f'f''(x) + \omega(f') + x]\, s =$$
$$= [f''(x) + \omega(f') + x]\, s = [\omega(f') + \omega(f'') + x]\, s =$$
$$= \omega(f') + \omega(f'') + xs = \omega(f') + \omega(f'').$$

8. Части. Если $a \in L$, то назовем *a-частью элемента x относительно s* (последнее будет обычно опускаться) и обозначим через x_a элемент $x(a + s)$. Ясно, что из $a \in D(s)$ вытекает $x = x_a$, а из $x \in S$ следует $x_a \in S$.

Предложение 18. *Справедливы следующие свойства*:

а) *если $b \in S_a$, то $x_b = x_a$;*

б) *если $a \geqslant b$, то $(x_a)_b = x_b$;*

---

[1]) Символ $\{x;\ \mathfrak{A}\}$ заменяет фразу: «Совокупность элементов x, обладающих свойством $\mathfrak{A}$».

в) *если* $a \geqslant b$ *и* $x \in S_a$, *то* $x_b \in S_b$;

г) *если* $x \in S_a$, *то* $x = d_a$ *для некоторого* $d \in D(s)$.

Доказательство. Справедливость свойства а) вытекает непосредственно из определения. Для доказательства б) используем ПЗ1:

$$(x_a)_b = x(a + s)(b + s) = x(b + s) = x_b.$$

Из равенства $x \dot{+} s = a + s$ и МЗ вытекает в):

$$x_b \dot{+} s = x(b + s) + s = (x + s)(b + s) = \\ = (a + s)(b + s) = b + s.$$

Для доказательства свойства г) выберем некоторое дополнение y элемента $x \dot{+} s$ и положим $d = x + y$. Так как ясно, что $d + s = 1$, а из предложения 2 вытекает, что $ds = 0$, то $d \in D(s)$. Теперь, учитывая предложения 2 и 3, получим

$$d_a = (x + y)(a + s) = (x + y)(x \dot{+} s) = x.$$

Предложение 19. *Если* $x \in D(s)$, $a \in S$, $a = a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m$ *и* $x_{a_i} = x_i$, *то* $x_a = x_1 \dot{+} \ldots \dot{+} x_m$ *и* $x_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m \in S_a$. *В частности*, $x_a \in S_a$. *Если, кроме того,* $a \in D(s)$, *то* $x = x_1 \dot{+} \ldots \dot{+} x_m$ и $x_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m \in D(s)$.

Доказательство. Если $m = 2$, то двукратное применение МЗ дает

$$x_1 + x_2 = x(a_1 + s) + x(a_2 + s) = x[x(a_1 + s) + a_2 + s] = \\ = x[(a_1 + s)(x + s) + a_2] = x(a + s) = x_a.$$

Согласно предложению 2, элементы a_1, a_2 и s независимы. Поэтому из предложения 3 вытекает

$$x_1 x_2 = x(a_1 + s)(a_2 + s) = xs = 0.$$

Если $m \geqslant 3$, то положим $b = a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m$. Очевидно, $a = a_1 \dot{+} b$, а из предложения 18, б) вытекает $(x_b)_{a_i} = x_i$, $i \geqslant 2$. Применяя индуктивное предположение и предложение 4, получим

$$x_a = x_1 \dot{+} x_b = x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \ldots \dot{+} x_m.$$

Далее, применяя МЗ, будем иметь

$$(x_1 + b) + s = x(a_1 + s) + s + b = a_1 + b + s = a + s.$$

Ввиду предложений 2 и 3,

$$(b+s)\,x_1=(b+s)\,x\,(a_1+s)=xs=0.$$

Отсюда, ввиду С3 и П31, вытекает

$$(x_1+b)\,s=bs=bas=0,$$

т. е. $x_1+b\in S_a$. Вторая часть предложения является очевидным следствием его первой части.

9. Симплексы и цепи. Упорядоченную последовательность $C=\langle a^0a^1\,\ldots\,a^k\rangle$, состоящую из $k+1$ элементов структуры, назовем *k-мерным симплексом относительно* (s, w, a), если $s\geqslant w$, $a^i\in S_a$, $(a^0+\,\ldots\,+a^k)\,w=0$. Если $a\in D(s)$, то все $a^i\in D(s)$. Такой симплекс называется *полным*. Элементы $a^0, \ldots, a^k$ назовем *вершинами* симплекса. Если $b\leqslant a$, то, ввиду предложения 18, в), $\langle a_b^0a_b^1\,\ldots\,a_b^k\rangle$ является симплексом относительно $\langle s, w, b\rangle$. Мы назовем его *b-частью симплекса C* и будем обозначать через C_b. Из определения множества S_a вытекает, что вершины каждого симплекса попарно перспективны. Ввиду предложения 18, г), каждый симплекс является a-частью некоторого полного симплекса.

Выражение вида

$$Z=\lambda_1C_1\oplus\,\ldots\,\oplus\lambda_mC_m, \tag{2}$$

где C_i — различные k-мерные симплексы, а λ_i — целые числа, назовем *k-мерной цепью*. Число $\sum\lambda_i$ назовем *индексом* этой цепи. *Произведением* μZ целого числа μ на цепь Z будем называть цепь

$$(\mu\lambda_1)\,C_1\oplus\,\ldots\,\oplus(\mu\lambda_m)\,C_m.$$

Если $Z^{(i)}=\lambda_1^{(i)}C_1\oplus\,\ldots\,\oplus\lambda_m^{(i)}C_m$, $i=1, 2,$ — две k-мерные цепи, то их *суммой* $Z^{(1)}+Z^{(2)}$ будем считать цепь

$$\left(\lambda_1^{(1)}+\lambda_1^{(2)}\right)C_1\oplus\,\ldots\,\oplus\left(\lambda_m^{(1)}+\lambda_m^{(2)}\right)C_m.$$

Так как, добавляя недостающие симплексы с коэффициентом 0, мы будем иметь, что любая пара цепей построена на одних и тех же симплексах, то сложение определено для любых цепей одинаковой размерности. При этом оказывается возможным символ $\oplus$ в формуле (2) считать символом сложения цепей, каждая из которых построена на одном симплексе. Нетрудно проверить, что цепи данной размерности образуют модуль над кольцом целых чисел.

Если $C = \langle a^0 \ldots a^k \rangle$ — k-мерный симплекс, то $(k-1)$-мерный симплекс, получаемый из C выбрасыванием вершины a^i, обозначим через $C(i)$. Если $k \geqslant 1$, то *границей* k-*мерного симплекса* C назовем $(k-1)$-мерную цепь

$$\Delta C = C(0) \oplus (-1) C(1) \oplus \ldots \oplus (-1)^k C(k).$$

Если $k = 0$, то положим $\Delta C = 0$. Границей цепи (2) назовем цепь

$$\Delta Z = \lambda_1 (\Delta C_1) \oplus \ldots \oplus \lambda_m (\Delta C_m).$$

Цепь, граница которой равна нулю, назовем *циклом*.

Предложение 20. *Граница любой цепи является циклом.*

Доказательство достаточно провести для случая, когда $Z = \langle a^0 \ldots a^k \rangle$, причем $k \geqslant 2$. Если $i < j$, то условимся обозначать через $Z(i, j)$ $(k-2)$-мерный симплекс, получаемый из Z выбрасыванием вершин a^i и a^j. Тогда

$$\Delta Z(i) = Z(0, i) \oplus \ldots \oplus (-1)^{i-1} Z(i-1, i) \oplus$$
$$\oplus (-1)^i Z(i, i+1) \oplus \ldots \oplus (-1)^{k-1} Z(i, k). \quad (3)$$

Следовательно, в разложение цепи $\Delta(\Delta Z)$ симплекс $Z(i, j)$ войдет дважды: один раз как элемент цепи $\Delta Z(i)$ и один раз как элемент цепи $\Delta Z(j)$. Из формулы (3) видно, что в первом случае коэффициент при нем будет $(-1)^{i+j-1}$, а во втором $(-1)^{i+j}$. Таким образом, в цепи $\Delta(\Delta Z)$ коэффициент при каждом из $Z(i, j)$ оказывается равным нулю, что и доказывает наше предложение.

Про цепь Z, являющуюся границей какой-либо цепи, скажем, что она *гомологична нулю*, и будем записывать это как $Z \backsim 0$. Из предложения 20 вытекает, что каждая цепь, гомологичная нулю, является циклом.

Если C — k-мерный симплекс относительно (s, w, a) и

$$a = a_1 \dotplus \ldots \dotplus a_m, \quad (4)$$

то символическое равенство

$$C = C_1 \dotplus \ldots \dotplus C_m,$$

где C_l — a_l-часть симплекса C, назовем *разложением симплекса* C, *соответствующим разложению* (4). Согласно предложению 19, для каждой вершины a^i симплекса C имеет место

$$a^i = a^i_{a_1} \dotplus \ldots \dotplus a^i_{a_m}.$$

Понятие разложения, соответствующего разложению (4), очевидным образом переносится на цепи. Если $Z = Z_1 \dotplus \ldots \dotplus Z_m$ — разложение цепи Z, то, очевидно, $\Delta Z = \Delta Z_1 \dotplus \ldots \dotplus \Delta Z_m$. Очевидно также, что компоненты разложения цикла сами являются циклами.

Скажем, что цикл Z *полугомологичен нулю*, если существует такое разложение $Z = Z_1 \dotplus \ldots \dotplus Z_m$ цепи Z, что $Z_i \backsim 0$ для каждого i.

Предложение 21. *Если $Z = Z_1 \dotplus Z_2$ — цикл относительно (s, w, a), а циклы Z_i, $i = 1, 2$, полугомологичны нулю, то и Z полугомологичен нулю.*

Доказательство. Указанное в формулировке разложение цикла Z соответствует некоторому разложению $a = a_1 \dotplus a_2$. Так как Z_i полугомологичны нулю, то $Z_i = Z_{i1} \dotplus \ldots \dotplus Z_{ir_i}$, где $Z_{ij} \backsim 0$, для некоторого разложения $a_i = a_{i1} \dotplus \ldots \dotplus a_{ir_i}$. Из предложений 4, 18, б) и 19 вытекает равенство

$$Z = Z_{11} \dotplus \ldots \dotplus Z_{1r_1} \dotplus Z_{21} \dotplus \ldots \dotplus Z_{2r_2},$$

доказывающее наше предложение.

Предложение 22. *Если Z_i, $i = 1, 2$, — циклы относительно (s, w, a), $Z_1 \backsim 0$, а Z_2 полугомологичен нулю, то цикл $Z = Z_1 \oplus Z_2$ полугомологичен нулю.*

Доказательство. Ввиду полугомологичности нулю цикла Z_2, существует такое разложение $Z_2 = U_1 \dotplus \ldots \dotplus U_m$, соответствующее разложению $a = a_1 \dotplus \ldots \dotplus a_m$, что $U_i \backsim 0$. Этому же разложению элемента a соответствует разложение $Z_1 = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_m$ цикла Z. Так как $Z_1 \backsim 0$, то $V_i \backsim 0$. Поэтому

$$Z = (U_1 \oplus V_1) \dotplus \ldots \dotplus (U_m \oplus V_m),$$

где $U_i \oplus V_i \backsim 0$, чем и заканчивается доказательство.

Предложение 23. *Если элементы p, x, s таковы, что $p \leqslant s$, $x \in D(s)$ и $p \sim x$, то в $D(s)$ существует такой элемент c, что*

$$c \dotplus p = x \dotplus c = p + x. \tag{5}$$

Если, кроме того, $w \leqslant s$ и $pw = 0$, то $\langle cx \rangle$ оказывается полным симплексом относительно (s, w, x). Если, *наконец,* $y \in \bar{D}(s)$, *то существует цепь*

$$\langle x^1 x^2 \rangle \oplus \langle x^2 x^3 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^{m-1} x^m \rangle$$

такая, что $x^1 = x$, *а* $x^m = y$.

Доказательство. Существование элемента c, удовлетворяющего равенствам (5), вытекает из предложения 5. Но, используя $p \leqslant s$, законы поглощения и МЗ, будем иметь

$$c + s = c + p + s = x + p + s = 1$$

и

$$cs = c(p + x)s = c(p + xs) = cp = 0,$$

т. е. $c \in D(s)$.

При выполнении дополнительных условий, учитывая (5), ПЗ1 и МЗ, приходим к

$$(x + c)w = w(p + x)s = w(p + xs) = wp = 0, \qquad (6)$$

откуда следует, что $\langle cx \rangle$ — полный симплекс.

Теперь положим $y_1 = (x + w)y$, y_2 — дополнение элемента y_1 в y, $x_i = x'_{y_i}$, $c_i = c_{y_i}$, $i = 1, 2$. Применяя ПЗ1, получим

$$(x_2 + w)y_2 \leqslant (x + w)yy_2 = y_1 y_2 = 0. \qquad (7)$$

Ввиду предложения 19,

$$y_1 + x_2 \in D(s).$$

Вторичное применение предложения 19 дает

$$c_1 + x_2 = c_{x_1} + x_2 \in D(s).$$

Отсюда, поскольку, согласно соотношению (6),

$$(x_1 + c_1 + x_2)w \leqslant (x + c)w = 0,$$

следует, что $\langle x(c_1 + x_2) \rangle$ — симплекс. Далее, $x_1 + s = x(y_1 + s) + s = y_1 + s$, т. е. $y_1 \leqslant x_1 + s$. Поэтому, применяя ПЗ1, МЗ, (6), СЗ, (5) и предложение 19, будем иметь

$$(c_1 + x_2 + w)y_1 \leqslant (c_1 + x_2 + w)(x + w)(x_1 + s) =$$
$$= [x_2 + w + c_1(x + w)](x_1 + s) = (x_2 + w + xc_1)(x_1 + s) =$$
$$= w + x_2(x_1 + s) = w + x_2 x_1 = w \leqslant s.$$

Умножив это соотношение на y, получим $(c_1 + x_2 + w)y_1 = 0$, откуда, ввиду (6) и СЗ, вытекает

$$(c_1 + x_2 + y_1)w = (c_1 + x_2)w = 0,$$

т. е. $\langle (c_1 + x_2)(y_1 + x_2) \rangle$ оказывается симплексом. Наконец, учитывая равенство $y_2 + s = x_2 + s$, ПЗ1, МЗ, (7) и СЗ, получим

$$(y + w) x_2 = (y + w)(y_2 + s) x_2 = \\ = [y_2 + (y + w) s] x_2 = (y_2 + w) x_2 = w x_2 = 0.$$

Отсюда, ввиду СЗ, вытекает, что $(x_2 + y) w = yw = 0$, т. е. что $\langle (y_1 + x_2) y \rangle$ является симплексом. Таким образом,

$$\langle x (c_1 + x_2) \rangle \oplus \langle (c_1 + x_2)(y_1 + y_2) \rangle \oplus \langle (y_1 + x_2) y \rangle$$

является искомой цепью.

Предложение 24. *Если существуют элементы p и d такие, что $p \leqslant s$, $pw = 0$, $p \sim d$ и $d \in D(s)$, то любая нульмерная цепь относительно (s, w, a), индекс которой равен нулю, гомологична нулю.*

Доказательство. Пусть индекс нульмерной цепи

$$Z = \lambda_1 a_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n a_n,$$

где $a_i \in S_a$, равен нулю. Тогда

$$Z = \lambda_1 (a_1 - a_2) \oplus (\lambda_1 + \lambda_2)(a_2 - a_3) \oplus \ldots \\ \ldots \oplus (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})(a_{n-1} - a_n)$$

(мы пишем $x - y$ вместо $x \oplus (-1) y$). Поэтому для доказательства предложения достаточно установить, что всякая нульмерная цепь вида $x - y$, где x, $y \in S_a$, гомологична нулю.

Пусть x — произвольный элемент из S_a. Положим

$$x_1 = x (d_a + w).$$

Пусть x_2 — дополнение элемента x_1 в x. Положим $d_1 = d_{x_1}$, $d_2 = d_{x_2}$. Из предложений 18, а) и 19 вытекает, что

$$d_a = d_x = d_1 \dot{+} d_2.$$

Из предложения 19 следует также, что

$$d_2 \dot{+} x_1 \in S_a. \tag{8}$$

Далее, применяя ПЗ1, (8) и СЗ, получим

$$(d_2 + w) x = (d_2 + w)(d_a + w) x = (d_2 + w) x_1 = d_2 x_1 = 0.$$

Отсюда, применяя ПЗ2, СЗ, ПЗ1 и $d \in D(s)$, выводим

$$(x + d_2 + x_1) w = d_2 w = d_2 d s w = 0.$$

Вместе с (8) полученное соотношение показывает, что

$$\langle x(d_2+x_1)\rangle \text{ — симплекс относительно } (s,\ w,\ a). \tag{9}$$

Далее, поскольку $p \sim d$, то из предложения 23 вытекает существование такого элемента c, что

$$dc=0, \tag{10}$$

а $\langle cd\rangle$ является полным симплексом относительно (s, w, d). Отсюда следует, что

$$\langle c_a d_a\rangle \text{ — симплекс относительно } (s,\ w,\ a). \tag{11}$$

Теперь, применяя М3, получим

$$d_2+x_1 \leqslant d_a+x_1=d_a+x(d_a+w)=$$
$$=(d_a+w)(d_a+x) \leqslant d_a+w.$$

Отсюда с помощью П31, М3, (11), С3, (10) и (8) будем иметь

$$(d_2+x_1+c_a)w=(d_2+x_1+c_a)(d_a+w)w=$$
$$=[d_2+x_1+c_a(d_a+w)]w=(d_2+x_1+c_ad_a)w=$$
$$=(d_2+x_1)w=0.$$

Полученное равенство вместе с (8) показывает, что $\langle(d_2+x_1)c_a\rangle$ является симплексом относительно (s, w, a). Этот результат вместе с (9) и (11) доказывает, что

$$\langle x(d_2+x_1)\rangle \oplus \langle(d_2+x_1)c_a\rangle \oplus \langle c_ad_a\rangle$$

— одномерная цепь. Простым подсчетом можно убедиться, что границей этой цепи служит $x-d_a$, т. е. $x-d_a \backsim 0$. Следовательно, $x-y=(x-d_a)\oplus(d_a-y)\backsim 0$, что и требовалось.

Теорема 5. *Если в структуре существуют элементы p, q, w и s, обладающие следующими свойствами:*

а) $p,\ q,\ w \leqslant s$;

б) *p, q, w независимы;*

в) *p перспективно некоторому дополнению элемента s;*

г) *q перспективно некоторому дополнению элемента s, то любой одномерный цикл относительно (s, w, a) полугомологичен нулю*[1].

---

[1]) Amemiya [1].

Сначала докажем вспомогательное утверждение:

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы* 5, *то как* p, *так и* q *перспективны любому дополнению элемента* s.

Доказательство. Пусть $q \sim d \in D(s)$, а x — произвольное дополнение элемента s. Если взять q в качестве w, а d — в качестве a, то мы оказываемся в условиях предложения 24. Поэтому $d - x \infty 0$. Значит,

$$d - x = \Delta(\langle x^0 x^1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^{r-2} x^r \rangle),$$

где $x^0 = d$, а $x^r = x$. По условию $x^0 \sim q$. Допустим, что нами доказаны соотношения: $x^0, \ldots, x^{i-1} \sim q$. Поскольку $\langle x^{i-1} x^i \rangle$ — симплекс, то $x^i \sim x^{i-1}$. Так как, кроме того, имеет место $x^{i-1} \sim q$ и $(x^i + x^{i-1}) q = 0$, то предложение 12 дает $x^i \sim q$. Продолжая индукцию, получим $x = x^r \sim q$.

Приступим к доказательству теоремы. Будем рассматривать цикл

$$Z = \langle x^1 x^2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^m x^1 \rangle \tag{12}$$

относительно (s, w, a). Ввиду предложения 18, г), можно считать, что Z является a-частью полного цикла

$$\langle d^1 d^2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle d^m d^1 \rangle.$$

Конечно, $d^i \in D(s)$. Число m в формуле (12) назовем *длиной* цикла Z. Если $b \geqslant a$, то симплекс $\langle y^1 y^2 \rangle$ относительно (s, w, b) назовем *мажорантой* цикла Z, если

$$y^1 + y^2 + w \geqslant x^i \quad \text{для всех } i. \tag{13}$$

Мажоранту будем подчинять одному из следующих условий:

$$(y^1 + y^2 + w) p = 0, \tag{14}$$

$$(y^1 + y^2) s \leqslant p + w. \tag{15}$$

Доказательство разобьем на ряд этапов.

I этап: $m = 1$.

Тогда $Z = \langle x^1 x^1 \rangle = \Delta \langle x^1 x^1 x^1 \rangle \infty 0$.

II этап: $m = 2$.

В этом случае опять имеем:

$$Z = \langle x^1 x^2 \rangle \oplus \langle x^2 x^1 \rangle = \Delta \langle x^1 x^2 x^1 \rangle \oplus \Delta \langle x^1 x^1 x^1 \rangle \infty 0.$$

III этап: $m \geqslant 3$. Допустим, что для всех циклов длины, меньшей m, полугомологичность нулю доказана. Докажем еще одну лемму:

Лемма 2. *Для всякого одномерного цикла* Z *существует такое разложение* $Z = Z_1 \dot{+} Z_2$, *что первый сим-*

плекс цикла Z_1 *обладает свойством* (14), *а первый симплекс цикла* Z_2 — *свойством* (15).

Доказательство. Ввиду предложения 18, а), Z можно считать циклом относительно (s, w, x^2). Пусть

$$x_2^2 = (x^1 + p + w)\, x^2, \quad x^2 = x_1^2 \dot{+} x_2^2 \text{ и } Z = Z_1 \dot{+} Z_2$$

— соответствующее разложение цикла Z. Полагая $x_i^1 = (x^1)_{x_i^2}$, $i = 1, 2$, и используя ПЗ1, получим

$$(x_1^1 + p + w)\, x_1^2 \leqslant (x^1 + p + w)\, x^2 x_1^2 = x_2^2 x_1^2 = 0.$$

Отсюда, применяя СЗ, ПЗ1 и МЗ, придем к соотношению

$$(x_1^1 + x_1^2 + w)\, p = (x_1^1 + w)\, sp = (w + x_1^1 s)\, p = wp = 0.$$

Значит, симплекс $\langle x_1^1 x_1^2 \rangle$ удовлетворяет условию (14). То, что симплекс $\langle x_2^1 x_2^2 \rangle$ удовлетворяет условию (15), следует из равенства

$$(x_2^1 + x_2^2)\, s = [x_2^1 + (x^1 + p + w)\, x^2]\, s \leqslant (x^1 + p + w)\, s = \\ = p + w + x^1 s = p + w,$$

получаемого с помощью МЗ.

1-й случай: Z обладает мажорантой, удовлетворяющей условию (14).

Из леммы 1 вытекает, что $d^1 \sim p$. Пусть r — ось перспективы. Из предложения 8 вытекает $y^1 \sim p^1 = (y^1 + r)\, p$. Но тогда, согласно предложению 5, существует такое c, что

$$y^1 \dot{+} c = p^1 \dot{+} c = y^1 + p^1. \tag{16}$$

Отсюда, применяя ПЗ1 и ПЗ2, получаем

$$c + s = c + p^1 + s = y^1 + p^1 + s = y^1 + s = b + s$$

и

$$cs = c\,(p^1 + c)\, s = c\,(p^1 + y^1)\, s = c\,(p^1 + y^1 s) = cp^1 = 0.$$

Значит, $c \in S_b$, откуда, ввиду предложения 18, в), имеем

$$c_a \in S_a. \tag{17}$$

Еще раз применяя (16), а также (14) и СЗ, получим

$$(y^1 + y^2 + c)\, w = (y^1 + y^2 + p^1)\, w = (y^1 + y^2)\, w = 0. \tag{18}$$

Из (16), ПЗ1, МЗ, (14), СЗ и ПЗ2 вытекает

$$(y^1 + y^2)\, c = (y^1 + y^2)(p^1 + y^1)\, c = \\ = [y^1 + y^2 (p^1 + y^1)]\, c = (y^1 + y^2 y^1)\, c = y^1 c = 0.$$

Отсюда, используя (13), (18) и СЗ, приходим к

$$(x^{i-1}+x^{i}+w)\,c_a \leqslant (y^1+y^2+w)\,c = (y^1+y^2)\,c = 0\,^{1)}.$$

Так как $\langle x^{i-1}x^{i}\rangle$ — симплекс, то, ввиду СЗ, последнее соотношение приводит к

$$(x^{i-1}+x^{i}+c_a)\,w = (x^{i-1}+x^{i})\,w = 0.$$

Этот результат вместе с (17) показывает, что $\langle c_a x^{i-1}x^{i}\rangle$ — 2-мерный симплекс. Отсюда с помощью простого подсчета получаем

$$Z = \Delta\left(\langle c_a x^1 x^2\rangle \oplus \langle c_a x^2 x^3\rangle \oplus \ldots \oplus \langle c_a x^m x^1\rangle\right),$$

т. е. $Z \backsim 0$.

2-й случай: Z обладает мажорантой, удовлетворяющей условию (15).

Используя ПЗ1, МЗ, (15) и независимость p, q, w, получим

$$(y^1+y^2+w)\,q = (y^1+y^2+w)\,sq =$$
$$= [w+(y^1+y^2)\,s]\,q \leqslant (p+w)\,q = 0.$$

Ввиду равноправия p и q, этот результат показывает, что мы находимся в условиях первого случая и, следовательно, $Z \backsim 0$.

3-й случай: $m=3$, симплекс $\langle x^1x^2\rangle$ удовлетворяет условиям (14) или (15).

Пусть $x_1^3=(x^1+x^2+w)\,x^3$ и x_2^3 — дополнение x_1^3 в x^3. Поскольку предложение 18, а) позволяет считать Z циклом относительно (s, w, x^3), разложению $x^3=x_1^3 \dot{+} x_2^3$ соответствует разложение $Z=Z_1 \dot{+} Z_2$ цикла Z. Положив $x_i^j=(x^j)_{x_i^3}$, $i, j=1, 2$, будем иметь

$$\left(x_2^1+x_2^2+w\right)x_2^3 \leqslant (x^1+x^2+w)\,x^3x_2^3 = x_1^3x_2^3 = 0,$$

откуда, ввиду СЗ, вытекает

$$\left(x_2^1+x_2^2+x_2^3\right)w = \left(x_2^1+x_2^2\right)w = 0.$$

Это равенство показывает, что $\langle x_2^3x_2^1x_2^2\rangle$ — 2-мерный симплекс. Но

$$Z_2 = \langle x_2^1x_2^2\rangle \oplus \langle x_2^2x_2^3\rangle \oplus \langle x_2^3x_2^1\rangle =$$
$$= \Delta\left(\langle x_2^3x_2^1x_2^2\rangle \oplus \langle x_2^3x_2^2x_2^3\rangle \oplus \langle x_2^3x_2^3x_2^3\rangle\right),$$

---

[1]) В частности, возможно, что $i-1=m$, а $i=1$.

т. е.

$$Z_2 \backsim 0. \qquad (19)$$

С другой стороны, поскольку $x^1 + x^2 + w \geqslant x_1^1,\ x_1^2,\ x_1^3$, то Z_1 оказывается в условиях случаев 3 или 4, т. е. $Z_1 \backsim 0$. Этот результат вместе с (19) и доказывает наше утверждение для случая 3.

4-й случай: $m = 3$.

Ввиду леммы 2, $Z = Z_1 \dot{+} Z_2$, где Z_l удовлетворяют условиям случая 3, так что остается только учесть предложение 21.

5-й случай: $m > 3$, а $\langle x^1 x^3 \rangle$ — симплекс.

В этом случае

$$Z^1 = \langle x^1 x^2 \rangle \oplus \langle x^2 x^3 \rangle \oplus \langle x^3 x^1 \rangle$$

и

$$Z^2 = -\langle x^3 x^1 \rangle \oplus \langle x^3 x^4 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^m x^1 \rangle$$

являются циклами, причем $Z = Z^1 \oplus Z^2$. Так как длина Z^2 меньше m, то $Z^2 = Z_1^2 \dot{+} \ldots \dot{+} Z_l^2$, где $Z_i^2 \backsim 0$. Этому разложению Z^2, очевидно, соответствует разложение

$$Z^1 = Z_1^1 \dot{+} \ldots \dot{+} Z_l^1.$$

Поэтому

$$Z = (Z_1^1 \oplus Z_1^2) \dot{+} \ldots \dot{+} (Z_l^1 \oplus Z_l^2).$$

Согласно доказанному в случае 4, Z_i^1 полугомологичен нулю. Следовательно, из предложения 22 вытекает, что $Z_i^1 \oplus Z_i^2$ полугомологичен нулю. После этого остается только применить предложение 21.

6-й случай: $m > 3$, для $\langle x^1 x^2 \rangle$ имеет место (14) или (15).

Сначала докажем:

Лемма 3. *Для каждого натурального l существует такое разложение $a = u_l \dot{+} v_l$, что для соответствующего разложения цикла $Z = U_l \dot{+} V_l$ имеет место следующее*:

а) V_l *полугомологичен нулю*;

б) $x^1 + x^2 + w \geqslant x_{u_l}^i$ *для* $i \leqslant l + 1$.

Если $l=1$, то условия а) и б) выполнены для разложения $a=a\dot{+}0$. Если лемма справедлива для всех $l<k$, то пусть

$$x^j_{k-1}=x^j_{u_{k-1}},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad x^{k+1}_{k1}=\left(x^{k-1}_{k-1}+w\right)x^{k+1}_{k-1}$$

и

$$x^{k+1}_{k-1}=x^{k+1}_{k1}\dot{+}x^{k+1}_{k2}.$$

Так как предложение 18, а) позволяет считать U_{k-1} циклом относительно $\left(s,\ w,\ x^{k+1}_{k-1}\right)$, то этому разложению соответствует разложение $U_{k-1}=U_{k1}\dot{+}U_{k2}$ цикла U_{k-1}. С помощью предложений 4 и 19 легко получить, что $Z=U_{k1}\dot{+}\dot{+}U_{k2}\dot{+}V_{k-1}$. Положим $x^j_{ki}=\left(x^j_{k-1}\right)_{x^{k+1}_{ki}}$, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Применяя ПЗ1, получим

$$\left(x^{k-1}_{k2}+w\right)x^{k+1}_{k2}\leqslant\left(x^{k-1}_{k-1}+w\right)x^{k+1}_{k-1}x^{k+1}_{k2}=x^{k+1}_{k1}x^{k+1}_{k2}=0.$$

Отсюда с помощью С3 придем к

$$\left(x^{k-1}_{k2}+x^{k+1}_{k2}\right)w=x^{k-1}_{k2}w=0.$$

Следовательно, $\langle x^{k-1}_{k2}x^{k+1}_{k2}\rangle$ — симплекс. Изменяя нумерацию и применяя результаты случая 5, убедимся, что цикл U_{k2} полугомологичен нулю. Ввиду предложения 21, цикл $V_k=U_{k2}\dot{+}V_{k-1}$ также полугомологичен нулю. С другой стороны, учитывая, что $x^j_{k-1}\in S_{u_{k-1}}$, будем иметь

$$\begin{aligned}x^{k+1}_{k1}&=\left(x^{k-1}_{k-1}+w\right)x^{k+1}_{k-1}\leqslant\left(x^{k-1}_{k-1}+w\right)\left(x^{k+1}_{k-1}+s\right)=\\&=\left(x^{k-1}_{k-1}+w\right)\left(x^{k-1}_{k-1}+s\right)=x^{k-1}_{k-1}+w\leqslant x^1+x^2+w.\end{aligned}$$

Так как $x^j_{k1}\leqslant x^j_{k-1}\leqslant x^1+x^2+w$ для $j\leqslant k$, то $U_k=U_{k1}$ удовлетворяет условию б). Поскольку $Z=U_k\dot{+}V_k$, лемма 3 доказана.

Пусть теперь $Z=U_{m-1}\dot{+}V_{m-1}$ — разложение, указанное в лемме 3. Ясно, что цикл U_{m-1} удовлетворяет условиям случая 1 или 2, следовательно, $U_{m-1}\backsim 0$, так что остается только применить предложение 21.

7-й случай: $m>3$.

Этот случай сводится к случаю 6 точно так же, как случай 4 — к случаю 3.

Теорема 5 полностью доказана.

10. Теорема существования. Доказываемая ниже теорема играет фундаментальную роль в построении регулярного кольца, связываемого с данной структурой.

Теорема 6. *Если в структуре L существуют элементы p, q, s и w, удовлетворяющие условиям* а) — г) *теоремы* 5, *а g и h — такие дополнения элемента s, что $g+w=h+w$, то существует один и только один автоморфизм f структуры L, оставляющий неподвижными все элементы из L, сравнимые с s, и переводящий g в h. Этот автоморфизм f нормален относительно s, причем $\omega(f)\leqslant w$. Автоморфизмы, нормальные относительно s и имеющие оси $\leqslant w$, образуют абелеву группу*[1]).

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1) *Если $\langle xy\rangle$ — симплекс относительно (s, w, a), то существует перспектива L_{x+w} на L_{y+w} с осью $(x+y)s$* (будем обозначать ее через $P_{\langle xy\rangle}$).

Ввиду предложения 7, достаточно установить, что $(x+y)s$ является осью перспективы элементов $x+w$ и $y+w$. Но этот результат легко получить, применяя МЗ и x, $y\in S_a$:

$$(x+w)+(x+y)s=w+(x+y)(x+s)=$$
$$=w+(x+y)(y+s)=(y+w)+(x+y)s,$$
$$(x+w)(x+y)s=(w+xs)(x+y)=$$
$$=w(x+y)=0=(y+w)(x+y)s.$$

2) *Если $u\leqslant x$, то $P_{\langle xy\rangle}(u)=(u+s)y$.*

Действительно, применяя МЗ и ПЗ1, будем иметь

$$P_{\langle xy\rangle}(u)=[u+(x+y)s](y+w)=$$
$$=(u+s)(x+y)(y+w)=(u+s)[y+(x+y)w]=$$
$$=(u+s)y.$$

3) *Если $\langle x_a y_a\rangle$ — a-часть симплекса $\langle xy\rangle$, то*

$$P_{\langle x_a y_a\rangle}(u)=\left(P_{\langle xy\rangle}(u)\right)_a=P_{\langle xy\rangle}(u) \text{ для всех } u\leqslant x_a+w.$$

Ввиду предложения 7, достаточно установить, что

$$P_{\langle y_a x_a\rangle}\left(\left(P_{\langle xy\rangle}(u)\right)_a\right)=u=P_{\langle y_a x_a\rangle}P_{\langle xy\rangle}(u).$$

Поскольку, согласно предложению 18, в), $x_a+s=y_a+s=$ $=a+s$, то

$$u+(x+y)s\leqslant x_a+s=a+s \tag{20}$$

[1]) Amemiya [1].

и

$$x_a+y_a\leqslant x_a+y_a+s=y_a+s. \tag{21}$$

Далее, обозначив через y' дополнение элемента y_a в y, будем иметь

$$P_{\langle y_a x_a\rangle}\left(\left(P_{\langle xy\rangle}(u)\right)_a\right)=[\,[u+(x+y)s](y+w)(a+s)+$$
$$+(x_a+y_a)s](x_a+w)=$$
$$=\{[u+(x+y)s](y+w)+(x_a+y_a)s\}(x_a+w)=$$

из (20) и П31

$$=[u+(x+y)s][y+w+(x_a+y_a)s](x_a+w)=$$

из М3

$$=[u+(x+y)s(x_a+w)][y'+w+(x_a+y_a)(y_a+s)]=$$

из М3

$$=[u+(x+y)w](y'+w+x_a+y_a)=$$

из $w\leqslant s$, М3, $x_a\in S$ и (21)

$$=u(x_a+y+w)=u.$$

Наконец, применяя М3, П32 и П31, получим

$$P_{\langle y_a x_a\rangle}P_{\langle xy\rangle}(u)=\{[u+(x+y)s](y+w)+$$
$$+(x_a+y_a)s\}(x_a+w)=[u+(x+y)s][y+w+y_a+$$
$$+(x_a+y_a)s](x_a+w)=u+(x+y)s(x_a+w)=u.$$

4) Цепь

$$Z=l_1\langle x^1y^1\rangle\oplus l_2\langle x^2y^2\rangle\oplus\ \ldots\ \oplus l_k\langle x^ky^k\rangle$$

назовем *канонической*, если для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1$ имеет место одна из следующих систем соотношений:

а) $l_i=l_{i+1}=1,\ y^i=x^{i+1}$;

б) $l_i=1,\ l_{i+1}=-1,\ y^i=y^{i+1}$;

в) $l_i=-1,\ l_{i+1}=1,\ x^i=x^{i+1}$;

г) $l_i=l_{i+1}=-1,\ x^i=y^{i+1}$.

С канонической цепью связано отображение

$$P_z=P^{l_k}_{\langle x^ky^k\rangle}P^{l_{k-1}}_{\langle x^{k-1}y^{k-1}\rangle}\ldots P^{l_1}_{\langle x^1y^1\rangle}. \tag{22}$$

Это отображение является изоморфизмом L_{x^1+w} на L_{y^k+w}, L_{x^1+w} на L_{x^k+w}, L_{y^1+w} на L_{y^k+w} или L_{y^1+w} на L_{x^k+w} в зависимости от того, имеет ли место $l_1 = l_k = 1$, $l_1 l_k = l_k = -1$, $l_1 l_k = l_1 = -1$ или $l_1 = l_k = -1$. Покажем, что *этот изоморфизм не зависит от выбора канонической цепи.* Для этого достаточно показать, что

если Z — полная цепь,

$$l_1 = l_k = 1$$

и $x^1 = y^k$, то P_Z совпадает с тождественным отображением E_{x^1+w} структуры L_{x^1+w} на себя.

Для доказательства заметим, что, согласно теореме 5,

$$Z = Z_1 \dotplus \ldots \dotplus Z_m, \tag{23}$$

где $Z_l \infty 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $m = 1$, т. е. $Z = \Delta U$. Число симплексов цепи U (при этом член $l\langle xyz\rangle$ считается $|l|$ раз) назовем ее *длиной* и обозначим через $d(U)$. Ввиду предложения 7, $\overset{-1}{P}_{\langle xy\rangle} = P_{\langle yx\rangle}$. Поэтому можно считать, что

$$Z = \langle x^1x^2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^{k-1}x^k\rangle \oplus \langle x^kx^1\rangle.$$

Если $d(U) = 1$, то можно считать, что

$$Z = \langle x^1x^2\rangle \oplus \langle x^2x^3\rangle \oplus \langle x^3x^1\rangle,$$

а значит,

$$P_Z = P_{\langle x^3x^1\rangle} P_{\langle x^2x^3\rangle} P_{\langle x^1x^2\rangle}.$$

Поскольку $(x^1 + x^2 + x^3)\,w = 0$, то, применяя МЗ, легко убедиться, что

$$(x^1 + x^2 + x^3)\,s\,(x^1 + w) = (x^1 + x^2 + x^3)\,s\,(x^2 + w) =$$
$$= (x^1 + x^2 + x^3)\,s\,(x^3 + w) = 0.$$

Поэтому предложение 9 позволяет считать оси перспектив $P_{\langle x^1x^2\rangle}$, $P_{\langle x^2x^3\rangle}$ и $P_{\langle x^3x^1\rangle}$ совпадающими с $c = (x^1 + x^2 + x^3)\,s$. Отсюда, принимая во внимание МЗ и ПЗ1 для всякого $u \in L_{x^1+w}$, получаем

$$P_Z(u) = \{[(u + c)(x^2 + w) + c](x^3 + w) + c\}(x^1 + w) =$$
$$= \{(u + c)(x^2 + w + c)(x^3 + w) + c\}(x^1 + w) =$$
$$= [(u + c)(x^3 + w) + c](x^1 + w) =$$
$$= (u + c)(x^3 + w + c)(x^1 + w) = (u + c)(x^1 + w) =$$
$$= u + c\,(x^1 + w) = u.$$

Этим показано, что $P_Z = E_{x^1+w}$.

Теперь допустим, что $d(U)=t \geqslant 2$ и что наше утверждение справедливо, если $Z'=\Delta U'$, где $d(U')<t$. Пусть $Z=\Delta U$ и $U=\langle yx^1x^2\rangle \oplus U'$, где $d(U')=t-1$. Тогда

$$Z=\langle x^1x^2\rangle-\langle yx^2\rangle \oplus \langle yx^1\rangle \oplus \Delta U'.$$

1-й случай: $y=x^1$. При этом условии $Z=\langle x^1x^1\rangle \oplus \Delta U'$, а значит,

$$\Delta U'=\langle x^1x^2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^kx^1\rangle-\langle x^1x^1\rangle.$$

Используя индуктивное предположение, получаем

$$P_Z=P_{\Delta U'}P_{\Delta\langle x^1x^1x^2\rangle}=E_{x^1+w}E_{x^1+w}=E_{x^1+w}.$$

2-й случай: $y=x^2$. Имеем

$$Z=\langle x^1x^2\rangle-\langle x^2x^2\rangle \oplus \langle x^2x^1\rangle \oplus \Delta U',$$

откуда

$$\Delta U'=-\langle x^2x^1\rangle \oplus \langle x^2x^2\rangle \oplus \langle x^2x^3\rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^kx^1\rangle.$$

Следовательно,

$$P_Z=P_{\Delta U'}P_{\Delta\langle x^2x^1x^2\rangle}=E_{x^1+w}.$$

3-й случай: $y \neq x^1, x^2$. В этом случае

$$\Delta U'=-\langle yx^1\rangle \oplus \langle yx^2\rangle \oplus \langle x^2x^3\rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^kx^1\rangle,$$

откуда

$$P_Z=P_{\Delta U'}P_{\Delta\langle yx^1x^2\rangle}=E_{x^1+w}.$$

Теперь допустим, что наше утверждение доказано, если разложение (23) содержит менее чем m слагаемых и $m \geqslant 2$. Разложение (23) соответствует некоторому разложению $x^1=v_1 \dot{+} \ldots \dot{+} v_m$. Положим $v=v_1 \dot{+} \ldots \dot{+} v_{m-1}$ и обозначим через V_1 и V_2 соответственно v-часть и v_m-часть цепи Z. Пусть ψ_i — изоморфизм, который по формуле (22) соответствует цепи V_i. Из 2) вытекает, что

$$P_Z(u)=u, \quad \text{если} \quad u \leqslant x^1. \tag{24}$$

Кроме того, предложение 11 дает

$$P_Z(w)=w. \tag{25}$$

Из (24) и (25) вытекает, что $u \leqslant v+w$ влечет $P_Z(u) \leqslant v+w$. Поэтому, применяя 3), будем иметь

$$P_Z(u)=P_Z(u)(v+s)=(P_Z(u))_v=\psi_1(u)$$

для всякого $u \leqslant v + w$. Отсюда, ввиду индуктивного предположения, получаем

$$P_Z(u) = u, \quad \text{если} \quad u \leqslant v + w. \tag{26}$$

Вполне аналогично доказывается, что

$$P_Z(u) = u, \quad \text{если} \quad u \leqslant v_m + w. \tag{27}$$

Если, далее, $u \leqslant x^1 + w$ и $ux^1 = 0$, то

$$\begin{aligned}
&[(u+v)(v_m+w)+v]\,[(v_m+u)(v+w)+v_m] = \\
&= (u+v)(v_m+w+v)(v_m+u) = && \text{(из М3)} \\
&= [u+v(v_m+u)]\,(v_m+w+v) = && \text{(из М3)} \\
&= (u+vv_m)(v_m+w+v) = u(x^1+w) = u. && \text{(из С3 и П31)}
\end{aligned}$$

Ввиду (24), (26) и (27), из полученного равенства следует, что

$$P_Z(u) = u, \quad \text{если} \quad u \leqslant x^1 + w \quad \text{и} \quad ux^1 = 0. \tag{28}$$

Пусть теперь u — произвольный элемент из L_{x^1+w}. Положим $u_1 = ux^1$, и пусть u_2 — дополнение u_1 в u. Тогда

$$u_2x^1 = u_2ux^1 = u_2u_1 = 0. \tag{29}$$

Так как $u = u_1 + u_2$, то из (24), (28) и (29) вытекает, что $P_Z(u) = u$, т. е. $P_Z = E_{x^1+w}$.

Учитывая этот результат, лемму 1 на стр. 34 и предложение 23, убеждаемся, что для любых двух элементов x и y из S_a описанным выше способом определяется единственный изоморфизм L_{x+w} на L_{y+w}. Мы будем называть его каноническим изоморфизмом и обозначать через $\Pi_{x\to y}$. Если $(x+y)w = 0$, то $\Pi_{x\to y} = P_{(x+w\to y+w;\,(x+y)s)}$. Если $x + w = y + w$, то $\Pi_{x\to y}$ является автоморфизмом структуры L_{x+w}. Такой автоморфизм будем называть *каноническим автоморфизмом*.

5) *Канонические автоморфизмы структуры L_{x+w} образуют абелеву группу.*

Пусть φ и ψ — произвольные канонические автоморфизмы структуры L_{x+w}. Ввиду 3), можно предполагать, что $x \in D(s)$. Из леммы 1 на стр. 34 следует, что $p \sim x$ и $q \sim x$. Поэтому из предложения 23 вытекает существование таких элементов $c, d \in D(s)$, что $\langle xc\rangle$ и $\langle xd\rangle$ являются симплексами, причем

$$x \dot{+} c = p \dot{+} c = p + x, \tag{30}$$

$$x \dot{+} d = q \dot{+} d = q + x. \tag{31}$$

Из 2) и предложения 11 вытекает, что

$$\varphi(x)+w=\varphi(x)+\varphi(w)=\varphi(x+w)=x+w. \qquad (32)$$

Отсюда, применяя П31, М3 и предложение 11, получаем

$$\varphi(x)\,s=\varphi(x)(x+w)\,s=\varphi(x)\,w=\varphi(xw)=0.$$

Так как П32 и (32) дают

$$\varphi(x)+s=\varphi(x)+w+s=x+w+s=1,$$

то $\varphi(x)\in D(s)$. Учитывая, что $\langle xc\rangle$ — симплекс, применяя (32), С3 и (30), получим

$$(\varphi(x)+w)\,c=(x+w)\,c=xc=0,$$

после чего С3 и предложение 11 дают $(\varphi(x)+c)\,w=$ $=\varphi(x)\,w=0$. Таким образом, $\langle\varphi(x)\,c\rangle$ оказывается симплексом. Аналогично проверяется, что симплексом является и $\langle\psi(x)\,d\rangle$. Учитывая эти результаты и выбор элементов c и d, можем положить

$$\varphi_1=P_{\langle xc\rangle}, \qquad \varphi_2=P_{\langle\varphi(x)\,c\rangle}, \qquad \psi_1=P_{\langle xd\rangle}, \qquad \psi_2=P_{\langle\psi(x)\,d\rangle}.$$

Ясно, что

$$\varphi=\varphi_2^{-1}\varphi_1 \qquad (33)$$

и

$$\psi=\psi_2^{-1}\psi_1.$$

Теперь, применяя М3, $x, d\in D(s)$ и (31), получим:

$$(x+p+w)+(x+d)\,s=p+w+(x+d)(x+s)=$$
$$=p+w+(x+d)(d+s)=(d+p+w)+(x+d)\,s.$$

Поскольку $(p+w+q)\,x\leqslant sx=0$, то, учитывая С3 и независимость p, q, w, будем иметь

$$(p+w)(x+q)=(p+w)\,q=0.$$

Отсюда, применяя М3, $x\in D(s)$ и (31), выводим

$$(x+p+w)(x+d)\,s=(p+w)(x+d)=$$
$$=(p+w)(x+q)=0$$

и

$$(d+p+w)(x+d)\,s=(p+w)(x+d)=0.$$

Этим показано, что $(x+d)\,s$ — ось перспективы элементов $x+p+w$ и $d+p+w$. Положим

$$\bar{\psi}_1=P_{(x+p+w\to d+p+w;\ (x+d)\,s)}.$$

Ввиду предложения 8, для всех $u \leqslant x + w$ имеет место

$$\psi_1(u) = \bar{\psi}_1(u).$$

Ввиду равенства

$$\psi(x) + w = x + w \qquad \text{(ср. с (32))}, \tag{34}$$

рассуждая, как выше, можно прийти к

$$(\psi(x) + p + w) + [\psi(x) + d]\, s = (d + p + w) + [\psi(x) + d]\, s.$$

Кроме того, применяя ПЗ1, (31), МЗ и $xs = 0$, будем иметь

$$[\psi(x) + d]\, s = [\psi(x) + d]\,(x + w + d)\, s =$$
$$= [\psi(x) + d]\,(x + w + q)\, s = [\psi(x) + d]\,(w + q). \tag{35}$$

По тем же соображениям

$$[\psi(x) + p + w]\, s = (x + p + w)\, s = p + w = (d + p + w)\, s.$$

Отсюда, используя предложение 3 и учитывая, что $\langle \psi(x) d \rangle$ — симплекс, получаем

$$[\psi(x) + p + w]\,[\psi(x) + d]\, s = (d + p + w)\,[\psi(x) + d]\, s =$$
$$= (p + w)\,[\psi(x) + d]\,(w + q) = 0.$$

Таким образом, имеет смысл

$$\bar{\psi}_2 = P_{(\psi(x) + p + w \to d + p + w;\ (\psi(x) + d)\, s)},$$

а предложение 8 обеспечивает равенство

$$\psi_2(u) = \bar{\psi}_2(u)$$

для всех $u \leqslant \psi(x) + w$.

Таким образом,

$$\bar{\psi}(u) = \bar{\psi}_2^{-1}\, \bar{\psi}_1 = \psi(u), \quad \text{если} \quad u \leqslant x + w. \tag{36}$$

Далее заметим, что, ввиду МЗ и (31),

$$(x + d)\, s = (x + q)\, s = q + xs = q.$$

Поэтому из (30), (35), МЗ, (34) и ПЗ1 следует

$$\bar{\psi}(c + w) = \{(c + w + q)\,(d + p + w) +$$
$$+ [\psi(x) + d]\, s\}\,[\psi(x) + p + w] =$$
$$= (c + w + q)\,\{d + p + w + [\psi(x) + d]\, s\}\,[\psi(x) + p + w] =$$
$$= (c + w + q)\,(x + p + w) =$$
$$= c + w + q\,(x + p + w) = c + w. \tag{37}$$

Ввиду (30) и МЗ,

$$(x+c)\,s=(x+p)\,s=p+cs\leqslant p+w.$$

Применяя (32), МЗ и этот результат, будем иметь

$$[\varphi(x)+c]\,s\leqslant(x+c+w)\,s=w+(x+c)\,s\leqslant p+w.$$

Поскольку, согласно предложению 11, $\bar\psi$ оставляет на месте все элементы из L_{p+w}, то последние соотношения показывают, что $\bar\psi$ удовлетворяет условиям предложения 10 в отношении перспектив φ_1 и φ_2. Поэтому

$$\bar\psi\varphi_1\bar\psi^{-1}=P_{(\bar\psi(x+w)\to\bar\psi(c+w);\ (x+c)\,s)}$$

и

$$\bar\psi\varphi_2\bar\psi^{-1}=P_{(\bar\psi(\varphi(x)+w)\to\bar\psi(c+w);\ [\varphi(x)+c]\,s)}.$$

Но, ввиду (32) и (36),

$$\bar\psi(\varphi(x)+w)=\bar\psi(x+w)=\psi(x+w)=x+w.$$

Вместе с (37) это дает $\bar\psi\varphi_1\bar\psi^{-1}=\varphi_1$ и $\bar\psi\varphi_2\bar\psi^{-1}=\varphi_2$. Отсюда

$$\bar\psi\varphi\bar\psi^{-1}=\bar\psi\varphi_2^{-1}\bar\psi^{-1}\bar\psi\varphi_1\bar\psi^{-1}=\varphi_2^{-1}\varphi_1=\varphi,$$

что, ввиду (36), равносильно $\psi\varphi\psi^{-1}=\varphi$, т. е. $\psi\varphi=\varphi\psi$.

6) *Если $x\in S_a$, $ys=0$, $x+w=y+w$, $u\leqslant s$, а канонической изоморфизм φ, отображающий L_{x+w} на $L_{\varphi(x)+w}$, таков, что $\varphi(x)\leqslant x+u$, то $\varphi(y)\leqslant y+u$.*

Если $\langle x\varphi(x)\rangle$ — симплекс, то φ — перспектива, и мы имеем

$$\varphi(y)=[y+(x+\varphi(x))\,s]\,[\varphi(x)+w]\leqslant$$
$$\leqslant[y+(x+u)\,s]\,[\varphi(x)+w]\leqslant y+u.$$

Если φ — канонический автоморфизм, то, согласно показанному в 5), φ коммутирует с $\psi=\Pi_{x\to y}$. Поэтому, используя МЗ и принимая во внимание предложение 11, будем иметь

$$\varphi(y)=\varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x))\leqslant\psi((x+u)\,(x+w))=$$
$$=\psi(x+w\,(x+u))=y+w\,(x+u)\leqslant y+s\,(x+u)=y+u.$$

Переходя к общему случаю, положим $b=a\,[\varphi(x)\,(x+w)+s]$. Пусть c — дополнение b в a. Тогда, ввиду МЗ, имеем

$$b+s=[\varphi(x)\,(x+w)+s]\,(a+s)=$$
$$=[\varphi(x)\,(x+w)+s]\,(x+s). \qquad (38)$$

Учитывая (38) и $xs = 0$, после четырехкратного применения МЗ получим

$$x_b + w = x[\varphi(x)(x+w)+s] + w =$$
$$= [\varphi(x)(x+w)+s](x+w) = \varphi(x)(x+w) + s(x+w) =$$
$$= \varphi(x)(x+w) + w = (\varphi(x)+w)(x+w). \quad (39)$$

Применяя ПЗ1 и МЗ и принимая во внимание (38), $\varphi(x) \leqslant \leqslant x+u \leqslant x+s$ и $\varphi(x)s = 0$, будем иметь

$$(\varphi(x))_b = \varphi(x)[\varphi(x)(x+w)+s] = \varphi(x)(x+w). \quad (40)$$

Отсюда, ввиду 3) и МЗ, вытекает

$$\varphi(x_b) + w = \varphi(x)(x+w) + w = (\varphi(x)+w)(x+w). \quad (41)$$

Сопоставляя (39) и (41), получим $x_b + w = \varphi(x_b) + w$, откуда следует, что $\chi = \text{II}_{x_b \to \varphi(x_b)}$ — канонический автоморфизм.

Далее, из 3), ПЗ1, (40) и предложения 19 вытекает

$$\varphi(x_c)(x+w) = (\varphi(x))_c\, \varphi(x)(x+w) = (\varphi(x))_c\,(\varphi(x))_b = 0.$$

Но тогда СЗ дает $[x_c + \varphi(x_c)]w = x_c w = 0$, т. е. $\langle x_c \varphi(x_c)\rangle$ оказывается симплексом.

Кроме того, двукратное применение МЗ дает

$$x_b + w = x(b+s) + w = (x+w)(b+s) =$$
$$= (y+w)(b+s) = y(b+s) + w = y_b + w,$$

а применение 3) и МЗ показывает, что

$$\chi(x_b) = \varphi(x_b) = \varphi(x)(b+s) \leqslant (x+u)(b+s) =$$
$$= x(b+s) + u = x_b + u.$$

Аналогично получаем, что

$$x_c + w = y_c + w, \quad \text{а} \quad \text{II}_{x_c \to \varphi(x_c)}(x_c) \leqslant x_c + u.$$

Отсюда, учитывая, что χ — канонический автоморфизм, а $\langle x_c \varphi(x_c)\rangle$ — симплекс, и принимая во внимание предложение 19 и то, что показано в начале доказательства, будем иметь

$$\varphi(y) = \varphi(y_b) + \varphi(y_c) = \chi(y_b) + \text{II}_{x_c \to \varphi(x_c)}(y_c) \leqslant y_b +$$
$$+ u + y_c = y + u.$$

7) Приступим к построению искомого автоморфизма f. Сначала определим $f(x)$ для $x \in S$. Заметим, что из 4)

вытекает существование канонического автоморфизма $\Pi_{g_x \to x}$. Положим

$$f(x) = \Pi_{g_x \to x}(h_x).$$

Это имеет смысл, так как двукратное применение МЗ дает

$$h_x + w = h(x+s) + w = (h+w)(x+s) =$$
$$= (g+w)(x+s) = g(x+s) + w = g_x + w. \quad (42)$$

Если $x = g$, то $h_x = h(g+s) = h$, а $g_x = g$, откуда

$$f(g) = \Pi_{g \to g}(h) = h. \quad (43)$$

Пусть, далее, $y = \Pi_{h_x \to x}(g_x)$. Заметим, что для всякого $z \in L_{a+w}$ из предложения 8 вытекает, что

$$P_{\langle ab \rangle}(z) + s = P_{\langle ab \rangle}(z) + (a+b)s + s =$$
$$= z + (a+b)s + s = z + s.$$

Отсюда, учитывая $g \in D(s)$, получаем: $y + s = g_x + s = x + s$, откуда $h_x = h_y$ и $g_x = g_y$. Кроме того, в силу единственности

$$\Pi_{h_x \to x} = \Pi_{g_x \to y}.$$

Поэтому

$$f(y) = \Pi_{g_y \to y}(h_y) = \Pi_{g_x \to y}(h_x) = \Pi_{h_x \to x}(h_x) = x.$$

Следовательно, f и $x \to \Pi_{h_x \to x}(g_x)$ — взаимно обратные отображения. Отсюда вытекает, что f — взаимно однозначное отображение S на S. Чтобы убедиться, что f изотонно, докажем:

Лемма. *Если* $x \geqslant y$, $x, y \in S$, *то* $\Pi_{g_x \to x}(h_y) \geqslant \Pi_{g_y \to y}(h_y)$.

Пусть отображение $\Pi_{g_x \to x}$ построено с помощью цепи

$$\langle g_y x_y^1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^m x \rangle.$$

Можно считать, что $\Pi_{g_y \to y}$ построено с помощью цепи

$$\langle g_x x^1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_y^m y \rangle.$$

Так как $g_x \geqslant g_y$ и $x^i \geqslant x_y^i$, то нашу лемму достаточно доказать для цепи, состоящей из одного симплекса. Но тогда

$$\Pi_{g_x \to x}(h_y) = [h_y + (x + g_x)s](x+w) \geqslant$$
$$\geqslant [h_y + (y + g_y)s](y+w) = \Pi_{g_y \to y}(h_y),$$

что и требовалось.

Из доказанной леммы вытекает, что неравенство $x \geqslant y$ влечет

$$f(x) = \Pi_{g_x \to x}(h_x) \geqslant \Pi_{g_y \to y}(h_y) = f(y),$$

т. е. что f изотонно на S.

Докажем еще одно свойство отображения f:

Если $x, y \in S$ *и* $y \leqslant x + u$, *где* $u \leqslant s$, *то* $f(y) \leqslant \leqslant f(x) + u$.

Действительно, из МЗ и ПЗ1 следует

$$x_y + s = x(y + s) + s = (x + s)(y + s) = y + s.$$

Поэтому

$$z_{x_y} = z_y \tag{44}$$

для всякого z, а из 4) вытекает существование канонического изоморфизма $\psi = \Pi_{x_y \to y}$. При этом, ввиду МЗ,

$$\psi(x_y) = y \leqslant (x + u)(y + s) = x_y + u.$$

Поскольку из предложения 11 и равенств (42) и (44) вытекает

$$\begin{aligned} f(x_y) + w = \Pi_{g_y \to x_y}(h_y + w) = \\ = \Pi_{g_y \to x_y}(g_y + w) = x_y + w \end{aligned} \tag{45}$$

и

$$f(x_y)s = f(x_y)(f(x) + w)s = f(x_y)w = \Pi_{g_y \to x_y}(h_y w) = 0,$$

то мы можем применить результаты 6). Следовательно,

$$\psi(f(x_y)) \leqslant f(x_y) + u \leqslant f(x) + u. \tag{46}$$

Учитывая (44), получаем

$$\psi(f(x_y)) = \Pi_{x_y \to y}\Pi_{g_y \to x_y}(h_y) = \Pi_{g_y \to y}(h_y) = f(y),$$

что вместе с (46) дает $f(y) \leqslant f(x) + u$.

8) Теперь распространим f на всю структуру L. Произвольный элемент z из L может быть записан в форме

$$z = x + u, \tag{47}$$

где $x \in S$, а $u \leqslant s$. Действительно, если $u = zs$, а x — дополнение элемента u в z, то, ввиду ПЗ1, имеем

$$xs = xzs = xu = 0.$$

Положим

$$f(z)=f(x)+u,$$

где $f(x)$ определено в 7).

Пусть теперь $x+u \leqslant y+v$, где $x, y \in S$, $u, v \leqslant s$.

Умножая это неравенство на $u+v$ и применяя МЗ, получим

$$x(u+v)+u \leqslant y(u+v)+v.$$

Так как $u+v \leqslant s$, а $xs=ys=0$, то мы приходим к $u \leqslant v$. Учитывая это неравенство и последний результат из 7), будем иметь

$$f(x)+u \leqslant f(y)+v+u=f(y)+v.$$

Отсюда следует, что $f(z)$ не зависит от способа представления z в форме (47), сохраняет отношение порядка и обладает обратным отображением с теми же самыми свойствами. Значит, f — автоморфизм структуры L.

9) Убедимся, что f удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, равенство $f(g)=h$ доказано в 7) (равенство (43)). Равенство $f(z)=z$ для $z \leqslant s$ вытекает из определения, данного в 8). Если $z \geqslant s$, то представление z в форме (47) имеет вид $z=x+s$, где x — дополнение s в z. Но из ПЗ2 и (45) следует, что

$$f(x)+s=f(x)+w+s=x+w+s=x+s,$$

т. е. что $f(z)=z$.

Если, далее, $x \in D(s)$, то $f(x)=\Pi_{g \to x}(h)$. Значит, $\Pi_{g \to x}(g+h)=x+f(x)$. Отсюда, ввиду предложения 11, имеем

$$(g+h)w=\Pi_{g \to x}((g+h)w)=(x+f(x))w.$$

С другой стороны, применение МЗ и (45) дает

$$(x+f(x))s+w=(x+f(x)+w)s=(x+w)s=w,$$

откуда $(x+f(x))s \leqslant w$ или, после двукратного применения ПЗ1,

$$(x+f(x))w=(x+f(x))sw=(x+f(x))s.$$

Таким образом,

$$(x+f(x))s=(x+f(x))w=(g+h)w=\mathrm{const} \leqslant w,$$

т. е.

$$\omega(f) \leqslant w.$$

10) Для доказательства единственности автоморфизма f допустим, что существует автоморфизм f' такой, что $f'(g)=h$ и $f'(x)=x$, если x сравнимо с s. Если $x \in S$, то по определению $f(x)=\Pi_{g_x \to x}(h_x)$. Допустим, что $\Pi_{g_x \to x}$ определяется цепью

$$\langle g_x x' \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x^m x \rangle. \tag{48}$$

Так как оси перспектив, произведением которых является $\Pi_{g_x \to x}$, лежат в L_s, то они останутся осями перспектив для образов вершин симплексов цепи (48) при автоморфизме f', сложенных с w (предложение 10). Кроме того,

$$f'(g_x)=f'(g(x+s))=hf'(x+s)=h(x+s)=h_x,$$

откуда

$$f'(g_x)+w=h_x+w=h(x+s)+w=$$
$$=(h+w)(x+s)=(g+w)(x+s)=g_x+w.$$

Следовательно,

$$\Pi_{f'(g_x) \to f'(x)}=\Pi_{g_x \to x},$$

а значит,

$$f(x)=\Pi_{g_x \to x}(h_x)=\Pi_{f'(g_x) \to f'(x)}(f'(g_x))=f'(x)$$

для всех x из S. Теперь, представляя произвольное z из L в форме (47), будем иметь

$$f'(z)=f'(x)+u=f(x)+u=f(z).$$

11) Сначала докажем:

Лемма. *Если* $x \in D(s)$, *а* $\omega(f) \leqslant w$, *то* $f(x)+w=$ $=x+w$.

Действительно, применяя П32 и предложение 16, будем иметь

$$f(x)+w=f(x)+\omega(f)+w=x+\omega(f)+w=x+w.$$

Пусть теперь f' и f'' — автоморфизмы, нормальные относительно s, причем $\omega(f')$, $\omega(f'') \leqslant w$, и пусть $f'f''(g)=h$ для некоторого $g \in D(s)$. Дважды применяя лемму, будем иметь

$$h+w=f'f''(g)+w=f''(g)+w=g+w.$$

Согласно уже доказанной части теоремы 6, существует автоморфизм f, нормальный относительно s и такой, что $f(g)=h$. Так как $f'f''(x)=x$ для всех x, сравнимых с s, то в силу единственности имеем $f'f''=\dot{f}$. Значит, $\dot{f}'f''$ — нормальный автоморфизм. Аналогично проверяется, что автоморфизм, обратный нормальному автоморфизму с осью $\leqslant w$, также нормален. Ввиду предложения 17, отсюда следует, что нормальные автоморфизмы, оси которых $\leqslant w$, образуют группу. Чтобы доказать ее коммутативность, заметим, что, согласно лемме, для $g \in D(s)$ справедливы равенства $f'(g)+w=$ $=g+w=f''(g)+w$. Из этих равенств следует, что $\Pi_{g \to f'(g)}$ и $\Pi_{g \to f''(g)}$ — канонические автоморфизмы структуры L_{g+w}. Значит, согласно доказанному в 5), они перестановочны. Отсюда

$$f'f''(g)=\Pi_{g \to f''(g)} f'(g)=\Pi_{g \to f''(g)} \Pi_{g \to f'(g)}(g)=$$
$$=\Pi_{g \to f'(g)} \Pi_{g \to f''(g)}(g)=\Pi_{g \to f'(g)} f''(g)=f''f'(g).$$

Учитывая единственность, получим $f'f''=f''f'$.

Теорема 6 полностью доказана.

11. Применение к трехмерному проективному пространству. Заметим, что в трехмерном проективном пространстве π существует четверка точек в общем положении. Пусть это будут точки p, q, w и x. Положим $s=p+q+w$. Так как $s \dot{+} x=\dot{\pi}$, а любые две точки перспективны между собой (см. сноску [1]) на стр. 16), то условия теоремы 5 выполнены. Следовательно, теорема 6 показывает, что для любых двух точек g и h, не принадлежащих плоскости s, существует коллинеация φ, обладающая следующими свойствами: а) $\varphi(g)=h$; б) $\varphi(x)=x$, если точка x принадлежит s; в) $[x+\varphi(x)] \cap s=w$, если точка x лежит вне s.

§ 4. КООРДИНАТИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ

12. Группа автоморфизмов. Допустим, что структура L обладает однородным базисом ранга n. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — этот однородный базис. Введем обозначения:

$\bar{a}_i$ — сумма всех a_k, где $k \neq i$;

$\bar{a}_{ij}$ — сумма всех a_k, где $k \neq i,\ j$, а $i \neq j$;

G_{ij} — множество автоморфизмов структуры L, нормальных относительно $\bar{a}_i$ и с осями, лежащими в L_{a_j};

G_i — подгруппа группы автоморфизмов, порожденная множеством $G_{i1} \cup \ldots \cup G_{ii-1} \cup G_{ii+1} \cup \ldots \cup G_{in}$;

H_{ijb} — множество автоморфизмов из G_i, оси которых $\leqslant b$, причем b является суммой некоторых a_k, отличных от a_i и a_j.

Предложение 25. *Автоморфизм f, нормальный относительно $\bar{a}_i$, является тождественным тогда и только тогда, когда $\omega(f)=0$.*

Доказательство. Если $f=1$, то $\omega(f)=[a_i+ + f(a_i)]\bar{a}_i = a_i\bar{a}_i = 0$. Наоборот, если $\omega(f) = 0$, то $[a_i+f(a_i)]\bar{a}_i=0=a_i\bar{a}_i$. Поскольку $[a_i+f(a_i)]+\bar{a}_i= =1=a_i+\bar{a}_i$, то, согласно НЗ, имеем

$$a_i+f(a_i)=a_i,$$

т. е.

$$f(a_i)\leqslant a_i.$$

Ввиду предложения 17, $\omega(f^{-1})=0$. Поэтому $f^{-1}(a_i)\leqslant a_i$, откуда

$$a_i\leqslant f(a_i).$$

Следовательно, $f(a_i)=a_i$.

Теперь утверждение единственности в теореме 6 дает, что $f=1$. Возможность применения теоремы 6 обеспечивается тем, что элементы $s=\bar{a}_i$, $w=a_j$, $p=a_k$, $q=a_l$, где i, j, k, l все различны, удовлетворяют условиям этой теоремы.

Предложение 26. *Множество G_{ij} является коммутативной группой, причем $\bigcup\limits_{f\in G_{ij}} f(a_i)$ совпадает с множеством всех дополнений элемента a_j в a_i+a_j.*

Доказательство. Так как элементы $s=\bar{a}_i$, $w=a_j$, $p=a_k$, $q=a_l$, где i, j, k, l все различны, удовлетворяют условиям теоремы 6, то первое утверждение нашего предложения сразу следует из этой теоремы. Пусть, далее, x — дополнение a_j в a_i+a_j. Тогда

$$x+\bar{a}_i=x+a_j+\bar{a}_{ij}=a_i+a_j+\bar{a}_{ij}=1,$$

а из ПЗ1 и предложения 3 вытекает

$$x\bar{a}_i=x(a_i+a_j)\bar{a}_i=xa_j=0.$$

Значит, $x\in D(\bar{a}_i)$, причем $x+a_j=a_i+a_j$. Применив теорему 6, убедимся, что в G_{ij} найдется автоморфизм f такой, что $f(a_i)=x$. Все доказано.

Предложение 27. *Если $j\neq k$, то $G_{ij}\cap G_{ik}=1$.*

Доказательство. Если $f \in G_{ij} \cap G_{ik}$, то $\omega(f) \leqslant \leqslant a_j a_k = 0$, и применение предложения 25 завершает доказательство.

Предложение 28. *Группа G_i абелева.*

Доказательство. Пусть $j \neq k$, $f \in G_{ij}$ и $g \in G_{ik}$. Если $x \in D(\bar{a}_i)$, то, очевидно, $f^{-1}(x) \in D(\bar{a}_i)$. Поэтому

$$[gf^{-1}(x) + f^{-1}(x)]\,\bar{a}_i = \omega(g),$$

откуда

$$[fgf^{-1}(x) + x]\,\bar{a}_i = f(\omega(g)).$$

Следовательно, fgf^{-1} нормален относительно $\bar{a}_i$, причем

$$\omega(fgf^{-1}) = f(\omega(g)) \leqslant f(a_k) = a_k,$$

ибо $a_k \leqslant \bar{a}_i$. Значит, $fgf^{-1} \in G_{ik}$. Аналогично установим, что $gf^{-1}g^{-1} \in G_{ij}$. Отсюда вытекает, что $fgf^{-1}g^{-1} \in G_{ik} \cap G_{ij}$. Принимая во внимание предложение 27, получим, что $fg = gf$. Следовательно, автоморфизмы из различных G_{ij} перестановочны. Так как, согласно предложению 26, каждое G_{ij} является абелевой группой, то все доказано.

Предложение 29. *Все автоморфизмы из G_i нормальны относительно $\bar{a}_i$. Для любых двух дополнений x и y элемента $\bar{a}_i$ в G_i существует единственный автоморфизм, переводящий x в y. Сама группа G_i является прямой суммой групп G_{ij}.*

Доказательство. Сначала докажем существование автоморфизма, переводящего x в y. Обозначим через k такое наименьшее число, что

$$x + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} = y + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k},$$

где $i_1, \ldots, i_k$ отличны от i и друг от друга. Если $k = 1$, то, согласно теореме 6, искомый автоморфизм существует в G_{ii_1}. Далее положим

$$z = (x + a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k-1}})(y + a_{i_k}).$$

Тогда, применяя П32, М3 и П31, будем иметь

$$z + \bar{a}_i = z + a_{i_k} + \bar{a}_i =$$
$$= (x + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k})(y + a_{i_k}) + \bar{a}_i = y + \bar{a}_i = 1.$$

Из М3 и предложения 3 вытекает

$$z\bar{a}_i=(x\bar{a}_i+a_{i_1}+\ldots+a_{i_{k-1}})(y\bar{a}_i+a_{i_k})=0.$$

Следовательно, $z\in D(\bar{a}_i)$. Кроме того, применяя М3 и П31, получим

$$z+a_{i_1}+\ldots+a_{i_{k-1}}=(x+a_{i_1}+\ldots+a_{i_{k-1}})\times$$
$$\times(y+a_{i_k}+a_{i_1}+\ldots+a_{i_{k-1}})=x+a_{i_1}+\ldots+a_{i_{k-1}}$$

и

$$z+a_{i_k}=(x+a_{i_1}+\ldots+a_{i_{k-1}}+a_{i_k})(y+a_{i_k})=y+a_{i_k}.$$

Ввиду индуктивного предположения, существуют f', $f''\in G_i$ такие, что $f'(z)=y$, а $f''(x)=z$. Следовательно, для $f=f'f''$ имеем $f(x)=y$.

Теперь возьмем произвольный автоморфизм f из G_i и два произвольных дополнения x и y элемента $\bar{a}_i$. Согласно уже показанному, существует $g\in G_i$, для которого $g(x)=y$. Заметим, что как f, так и g, очевидно, оставляют на месте все элементы, сравнимые с $\bar{a}_i$. Поэтому, учитывая предложение 28, будем иметь

$$[x+f(x)]\bar{a}_i=g([x+f(x)]\bar{a}_i)=[g(x)+gf(x)]\bar{a}_i=$$
$$=[g(x)+f(g(x))]\bar{a}_i=[y+f(y)]\bar{a}_i.$$

Отсюда следует, что f нормален относительно $\bar{a}_i$.

Пусть, наконец, f', $f''\in G_i$, $x\in D(\bar{a}_i)$ и $f'(x)=f''(x)$. Тогда $h=f'f''^{-1}$ нормален относительно $\bar{a}_i$ и $h(x)=x$. Отсюда $\omega(h)=[x+h(x)]\bar{a}_i=x\bar{a}_i=0$, после чего предложение 25 дает $h=1$, т. е. $f'=f''$.

Чтобы доказать, что G_i — прямая сумма групп G_{ij}, достаточно установить, что $f\in G_{ij}\cap H$, где H—подгруппа группы G_i, порожденная объединением $\bigcup\limits_{k\neq i,j} G_{ik}$, влечет $f=1$. Но, учитывая предложения 17 и 3, а также уже доказанную часть предложения 29, будем иметь $\omega(f)\leqslant a_j\bar{a}_{ij}=0$. После этого остается только применить предложение 25.

Из предложений 29 и 17 вытекает:

Предложение 30. *H_{ijb} — группа.*

Предложение 31. *Если $b=a_{i_1}+\ldots+a_{i_l}$, то $H_{ijb}=G_{ii_1}\ldots G_{ii_l}$. В частности, $G_{ik}=H_{ija_k}$ для всякого $j\neq i$, k,* Доказательство. Если $f \in H_{ijb}$, то, ввиду предложения 29, $f = f' f_{i_1} \ldots f_{i_l}$, где $f' = \prod_{t \neq i_1, \ldots, i_l} G_{it}$, $f_{it} \in G_{ii_t}$.

Если $g = f_{i_1} \ldots f_{i_l}$ и $x \in D(\bar{a}_i)$, то $g(x) \in D(\bar{a}_i)$. Учитывая М3 и предложние 16, будем иметь

$$\omega(f') = [f'g(x) + g(x)]\, \bar{a}_i = [f(x) + g(x)]\, \bar{a}_i \leqslant (x + b)\, \bar{a}_i = b.$$

Отсюда и из предложения 17 вытекает

$$\omega(f') \leqslant b \sum_{t \neq i_1, \ldots, i_l} a_t = 0,$$

после чего предложение 25 приводит к $f' = 1$, т. е. к $f \in G_{ii_1} \ldots G_{ii_l}$.

Предложение 32. *Если* $g \in H_{jlb}$, *а* $f \in G_i$, *то* $gfg^{-1} \in G_i$ *и* $\omega(gfg^{-1}) = g(\omega(f))$.

Доказательство. Пусть $x \in D(\bar{a}_i)$. Учитывая П32, предложение 16, П31 и М3, получим

$$g^{-1}(x) + \bar{a}_i = g^{-1}(x) + \omega(g^{-1}) + \bar{a}_i = x + \omega(g^{-1}) + \bar{a}_i = 1$$

и

$$g^{-1}(x)\, \bar{a}_i = g^{-1}(x)(x + \omega(g^{-1}))\, \bar{a}_i = g^{-1}(x)\, \omega(g^{-1}) =$$
$$= g^{-1}(x\omega(g^{-1})) \leqslant g^{-1}(x\bar{a}_i) = 0,$$

т. е. $g^{-1}(x) \in D(\bar{a}_i)$. Поэтому, применяя предложение 16, будем иметь

$$x + gfg^{-1}(x) = g(g^{-1}(x) + f(g^{-1}(x))) =$$
$$= g(g^{-1}(x) + \omega(f)) = x + g(\omega(f)). \quad (49)$$

Далее, ввиду П32 и предложения 16, получим

$$g(\bar{a}_i) = g(a_j) + \bar{a}_{ij} = g(a_j) + \omega(g) + \bar{a}_{ij} =$$
$$= a_j + \omega(g) + \bar{a}_{ij} = \bar{a}_i. \quad (50)$$

Если z сравнимо с $\bar{a}_i$, то, согласно (50), это справедливо как для $g(z)$, так и для $g^{-1}(z)$. Поскольку f нормален относительно $\bar{a}_i$ (предложение 29), то $gfg^{-1}(z) = gg^{-1}(z) = z$. Кроме того, из (50) следует, что $g(\omega(f)) \leqslant g(\bar{a}_i) = \bar{a}_i$. Ввиду этого соотношения, умножая (49) на $\bar{a}_i$ и применяя М3, получим

$$[x + gfg^{-1}(x)]\, \bar{a}_i = g(\omega(f)).$$

Ввиду произвольности x, отсюда следует, что gfg^{-1} нормален относительно $\overline{a}_i$ и что $\omega(gfg^{-1}) = g(\omega(f))$.

Предложение 33. *Если $i \neq j$, $f \in H_{ijb}$ и $g \in H_{jib}$, то $fg = gf$.*

Доказательство. Так как $H_{ijb} \subset G_i$, то, согласно предложению 32, $g^{-1}fg \in G_i$. Поскольку $a_i \leqslant \overline{a}_j$, $g \in H_{jib} \in G_j$, а, ввиду предложения 16,

$$f(a_i) \leqslant f(a_i) + \omega(f) = a_i + \omega(f) \leqslant a_i + \overline{a}_{ij} = \overline{a}_j,$$

то

$$gfg^{-1}(a_i) = gf(a_i) = f(a_i).$$

После этого предложение 29 дает $gfg^{-1} = f$, т. е. $gf = fg$.

Предложение 34. *В G_{ij} существует автоморфизм f такой, что $\omega(f) = a_j$, а $f(a_i)\, a_i = 0$.*

Доказательство. Так как $a_i \sim a_j$, то, согласно предложению 5, существует такой элемент d, что $a_i \dot{+} d = a_j \dot{+} d = a_i + a_j$. При этом из предложения 3 вытекает, что

$$(a_i + d)\,\overline{a}_i = (a_i + a_j)\,\overline{a}_i = a_j. \tag{51}$$

Отсюда

$$d\overline{a}_i = d\,(a_i + d)\,\overline{a}_i = da_j = 0.$$

Кроме того, мы имеем

$$d + \overline{a}_i = d + a_j + \overline{a}_{ij} = a_i + a_j + \overline{a}_{ij} = 1.$$

Следовательно, $d \in D(\overline{a}_i)$. Ввиду предложения 29, в G_i существует автоморфизм f, переводящий a_i в d, так что

$$f(a_i)\, a_i = 0.$$

Из (51) вытекает $\omega(f) = [a_i + f(a_i)]\,\overline{a}_i = (a_i + d)\,\overline{a}_i = a_j$, откуда, ввиду предложения 31, получаем, что $f \in G_{ij}$.

13. Операция $\otimes$. Положим

$$f \otimes g = fgf^{-1}g^{-1}.$$

Предложение 35. *Если $f \in G_i$, а $g \in H_{jib}$, то $f \otimes g \in H_{ijb}$.*

Доказательство. Пусть $x \geqslant b$. Положим $x = x\overline{a}_j \dot{+} y$. Так как $y\overline{a}_j = yx\overline{a}_j = 0$, то $y \leqslant d \in D(\overline{a}_j)$. Поэтому

$$[g(y) + y]\,\overline{a}_j \leqslant [g(d) + d]\,\overline{a}_j = \omega(g).$$

Применяя П32, М3 и соотношение $g(y)+\bar{a}_j=g(y+\bar{a}_j)=$ $=y+\bar{a}_j$, будем иметь

$$g(y)+\omega(g)=g(y)+[g(y)+y]\bar{a}_j+\omega(g)=$$
$$=[g(y)+y][g(y)+\bar{a}_j]+\omega(g)\geqslant y+\omega(g).$$

Аналогично, учитывая предложение 17, получим $g^{-1}(y)+$ $+\omega(g)\geqslant y+\omega(g)$, откуда $y+\omega(g)\geqslant g(y)+\omega(g)$. Следовательно,

$$y+\omega(g)=g(y)+\omega(g)=g(y+\omega(g)).$$

Отсюда, применяя П32, придем к

$$x=x+\omega(g)=x\bar{a}_j+y+\omega(g)=g(x\bar{a}_j+y+\omega(g))=g(x).$$

Аналогично, учитывая предложение 17, убедимся, что $g^{-1}(x)=x$. Поэтому, принимая во внимание $f^{-1}(x)\geqslant$ $\geqslant f^{-1}(b)=b$, будем иметь

$$f\otimes g(a_i+b)=fgf^{-1}(a_i+b)=ff^{-1}(a_i+b)=a_i+b. \quad (52)$$

Так как $gf^{-1}g^{-1}\in G_i$ (предложение 32), то $h=f\otimes g=$ $=fgf^{-1}g^{-1}\in G_i$ и, следовательно, нормален относительно $\bar{a}_i$ (предложение 29). При этом, учитывая (52) и М3, имеем $\omega(h)=[a_i+h(a_i)]\bar{a}_i\leqslant[a_i+h(a_i+b)]\bar{a}_i=(a_i+b)\bar{a}_i=b$, что доказывает соотношение $h\in H_{ijb}$.

Предложение 36. *Если* $i\neq k$, *то* $G_{ij}\otimes G_{jk}\subset G_{ik}$.

Для доказательства достаточно заметить, что из предложений 31 и 35 вытекает

$$G_{ij}\otimes G_{jk}\subset G_i\otimes H_{jia_k}\subset H_{ija_k}=G_{ik}.$$

Предложение 37. *Если* $f\in G_i$, *а* $g\in H_{jib}$, *то* $(f\otimes g)g$ *перестановочен со всеми элементами из* $H_{ijb}H_{jib}$, *а* $f\otimes g=$ $=g^{-1}fgf^{-1}=f^{-1}g^{-1}fg$.

Доказательство. Из предложения 35 вытекает, что

$$fgf^{-1}=(f\otimes g)g\subset H_{ijb}H_{jib}.$$

Поэтому, согласно предложениям 28 и 33, $fgf^{-1}=(f\otimes g)g$ перестановочен со всеми элементами из $H_{ijb}H_{jib}$. Кроме того, из предложения 32 вытекает, что $g^{-1}fg\in G_i$. Поэтому, учитывая предложение 28, будем иметь

$$f\otimes g=fgf^{-1}g^{-1}=g^{-1}fgf^{-1}=f^{-1}g^{-1}fg.$$

Предложение 38. *Если* $f, f' \in G_i$, $g, g' \in H_{jib}$, *то* $f \otimes gg' = (f \otimes g)(f \otimes g')$ *и* $ff' \otimes g = (f \otimes g)(f' \otimes g)$.

Доказательство. Из предложения 37 вытекает, что $f(f \otimes g) = g^{-1}fg$. Поэтому, ввиду предложений 28, 37 и 32, имеем

$$(f \otimes g)(f \otimes g')gg' = (f \otimes g)(f \otimes g')g'g = \\ = (f \otimes g)g(f \otimes g')g' = fgf^{-1}fg^{-1}f^{-1} = \\ = \left(fgg'f^{-1}\right)(gg')^{-1}gg' = (f \otimes gg')(gg')$$

и

$$ff'(f \otimes g)(f' \otimes g) = f'g^{-1}fg(f' \otimes g) = \\ = g^{-1}fgg^{-1}f'g = ff'(ff')^{-1}g^{-1}ff'g = ff'(ff' \otimes g),$$

откуда и следуют требуемые равенства.

Предложение 39. *Если* $f \in H_{ijb}$, $g \in H_{jib}$ *и существует перспектива* φ *структуры* $L_{a_i + g(a_j)}$ *на* $L_{f(a_i)+g(a_j)}$ *с осью* d, *лежащей в* L_{a_j}, *то существует автоморфизм* $h \in G_{ij}$ *такой, что* $h(a_i) = \varphi(a_i)$ *и* $h \otimes g = f$.

Доказательство. Применяя П32 и М3, получим

$$\varphi(a_i) + \bar{a}_i = (a_i + d)[f(a_i) + g(a_j)] + \bar{a}_i + d = \\ = (a_i + d)[f(a_i) + g(a_j) + d] + \bar{a}_i = \\ = (a_i + d)(a_i + g(a_j) + d) + \bar{a}_i = a_i + d + \bar{a}_i = 1$$

и

$$\varphi(a_i)\bar{a}_i = (a_i + d)[f(a_i) + g(a_j)]\bar{a}_i = d[f(a_i) + g(a_j)] = 0.$$

Следовательно, $\varphi(a_i) \in D(\bar{a}_i)$ и, ввиду предложения 29, существует такой $h \in G_i$, что $h(a_i) = \varphi(a_i)$. Учитывая предложение 29 и М3, будем иметь

$$\omega(h) = [a_i + h(a_i)]\bar{a}_i = [a_i + \varphi(a_i)]\bar{a}_i = \\ = \{a_i + (a_i + d)[f(a_i) + g(a_j)]\}\bar{a}_i = \\ = (a_i + d)[a_i + f(a_i) + g(a_j)]\bar{a}_i \leqslant (a_i + d)\bar{a}_i = d \leqslant a_j,$$

откуда, согласно предложению 31, имеем $h \in G_{ij}$. Далее заметим, что из предложения 11 вытекает

$$h(a_i) + g(a_j) = \varphi(a_i) + g(a_j) = \varphi(a_i + g(a_j)) = f(a_i) + g(a_j).$$

Отсюда, ввиду предложения 33 и равенства $g(a_i)=a_i$, получаем

$$g^{-1}hg(a_i)+a_j=g^{-1}(h(a_i)+g(a_j))=$$
$$=g^{-1}f(a_i)+a_j=f(a_i)+a_j.$$

Применяя к обеим частям этого равенства автоморфизм h^{-1} и учитывая ПЗ2, предложения 16 и 17, а также соотношения $\omega(h)\leqslant a_j$ и $f(a_i)\in D(\bar{a}_i)$, будем иметь

$$h^{-1}g^{-1}hg(a_i)+a_j=h^{-1}f(a_i)+a_j+\omega(h^{-1})=f(a_i)+a_j$$

или, полагая $f^{-1}h^{-1}g^{-1}hg=k$,

$$k(a_i)+a_j=a_i+a_j.$$

Отсюда

$$k(a_i)+a_i+a_j=a_i+a_j. \tag{53}$$

Кроме того, согласно предложениям 37, 35 и 30, имеем

$$k=f^{-1}(h\otimes g)\subset H_{ijb}H_{ijb}\subset H_{ijb},$$

т. е.

$$\omega(k)\leqslant b.$$

Умножая (53) на $\bar{a}_i$ и применяя МЗ, придем к

$$\omega(k)+a_j=a_j,$$

т. е. к

$$\omega(k)\leqslant a_j.$$

Таким образом, $\omega(k)\leqslant a_jb=0$. Ввиду предложения 25, получаем, что $f^{-1}(h\otimes g)=k=1$, т. е. $f=h\otimes g$.

Предложение 40. *Если $f\in H_{ijb}$, а $g\in H_{jib}$, то $\omega(f)\leqslant\omega(g)$ имеет место тогда и только тогда, когда $f=h\otimes g$ для некоторого $h\in G_{ij}$.*

Доказательство. Если $f=h\otimes g$, то из предложений 35, 17, 32 и 16 вытекает

$$\omega(f)\leqslant\omega(h)+\omega(gh^{-1}g^{-1})=$$
$$=\omega(h)+g(\omega(h))\leqslant a_j+g(a_j)=a_j+\omega(g).$$

Умножая на b и применяя ПЗ1, МЗ и предложение 3, получаем

$$\omega(f)\leqslant a_jb+\omega(g)=\omega(g).$$

Если же $\omega(f) \leqslant \omega(g)$, то применение ПЗ2 и предложения 16 дает

$$[a_i + g(a_j)] + a_j = a_i + g(a_j) + \omega(g) + \omega(f) = \\ = f(a_i) + g(a_j) + \omega(f) + a_j = [f(a_i) + g(a_j)] + a_j. \quad (54)$$

Кроме того, из предложения 16 вытекает

$$g(a_j) \leqslant g(a_j) + \omega(g) = a_j + \omega(g) \leqslant a_j + b \leqslant \bar{a}_i.$$

Поэтому, применяя ПЗ1 и МЗ, получим

$$[a_i + g(a_j)]\, a_j = [a_i + g(a_j)]\, \bar{a}_i a_j = g(a_j)\, a_j$$

и

$$[f(a_i) + g(a_j)]\, a_j = [f(a_i) + g(a_j)]\, \bar{a}_i a_j = \\ = [f(a_i \bar{a}_i) + g(a_j)]\, a_j = g(a_j)\, a_j.$$

Следовательно,

$$[a_i + g(a_j)]\, a_j = [f(a_i) + g(a_j)]\, a_j.$$

Ввиду предложения 6, отсюда и из (54) вытекает, что элементы $a_i + g(a_j)$ и $f(a_i) + g(a_j)$ обладают осью перспективы, лежащей в L_{a_j}. После этого применение предложения 39 доказывает существование нужного автоморфизма h.

Предложение 41. *Если $g \in H_{jib}$ и $a_j g(a_j) = 0$, то отображение $h \to h \otimes g$ является изоморфизмом группы G_{ij} на подгруппу, состоящую из всех автоморфизмов $f \in H_{ijb}$, удовлетворяющих соотношению $\omega(f) \leqslant \omega(g)$.*

Доказательство. Из предложений 29 и 17 вытекает, что указанное множество автоморфизмов является подгруппой. Предложения 38 и 40 показывают, что наше отображение является гомоморфизмом на эту подгруппу. Если $h \otimes g = 1$, то, ввиду предложений 37 и 32, имеем $\omega(h) = \omega(g^{-1}hg) = g^{-1}(\omega(h))$. Поэтому $\omega(h) \leqslant a_j g^{-1}(a_j) = 0$ и предложение 25 дает, что $h = 1$.

Предложение 42. *Если $h \in G_{ij}$, $\omega(h) = a_j$, $h(a_i)\, a_i = 0$, то отображение $g \to h \otimes g$ является изоморфизмом H_{jib} на H_{ijb}, причем $\omega(g) = \omega(h \otimes g)$.*

Доказательство. Ввиду предложений 35 и 38, наше отображение является гомоморфизмом H_{jib} в H_{ijb}. Если $h \otimes g = 1$, то предложения 32 и 37 дают $g^{-1}(a_j) = g^{-1}(\omega(h)) = \omega(g^{-1}hg) = \omega(h) = a_j$. В силу единственности (предложение 29), имеем $g = 1$. Значит, наше отображение — изоморфизм. Пусть теперь $f \in H_{ijb}$. Согласно предложениям 16 и 3, имеем

$$h(a_i) + \bar{a}_j = h(a_i) + a_i + \bar{a}_{ij} = \omega(h) + a_i + \bar{a}_{ij} = 1$$

и

$$h(a_l)\,\overline{a_j} \leqslant h(a_l)\,[a_l + \omega(h)]\,\overline{a_j} = h(a_l)\,a_l = 0,$$

т. е.

$$h(a_l) \in D(\overline{a_j}). \tag{55}$$

Далее, из П32, $h(a_l) \in D(\overline{a_l})$ и предложения 16 вытекает

$$h(a_l) + b = h(a_l) + \omega(f) + b = fh(a_l) + b. \tag{56}$$

Прибавляя к обеим частям по $\overline{a_j}$ и учитывая (55), будем иметь

$$fh(a_l) + \overline{a_j} = 1.$$

Кроме того, применение (56), П31, М3 и (55) дает

$$fh(a_l)\,\overline{a_j} = fh(a_l)\,[h(a_l) + b]\,\overline{a_j} = fh(a_l)\cdot b = fh(a_l b) = 0.$$

Следовательно, $fh(a_l) \in D(\overline{a_j})$. Поэтому предложение 29 обеспечивает существование такого автоморфизма $g \in G_j$, что

$$g^{-1}h(a_l) = fh(a_l). \tag{57}$$

Так как из (55), (57), (56) и М3 следует, что

$$\omega(g^{-1}) = [h(a_l) + g^{-1}h(a_l)]\,\overline{a_j} =$$
$$= [h(a_l) + fh(a_l)]\,\overline{a_j} \leqslant [h(a_l) + b]\,\overline{a_j} = b,$$

то $g \in H_{jib}$. При этом, учитывая предложения 37 и 28, а также соотношение (57), будем иметь

$$h \otimes g(a_l) = h^{-1}g^{-1}hg(a_l) = h^{-1}g^{-1}h(a_l) = h^{-1}fh(a_l) = f(a_l).$$

Ввиду предложения 29, отсюда следует, что $h \otimes g = f$. Таким образом, показано, что наше отображение является отображением на H_{ijb}. Наконец, учитывая предложения 37 и 17, а также соотношение (55), получим

$$\omega(h \otimes g) = [(h \otimes g)\,h(a_l) + h(a_l)]\,\overline{a_l} = [g^{-1}hg(a_l) + h(a_l)]\,\overline{a_l} =$$
$$= [g^{-1}h(a_l) + h(a_l)]\,\overline{a_l} = \omega(g^{-1}) = \omega(g).$$

Предложение 43. *Если $g \in H_{jlb}$, а h обладает свойствами, перечисленными в предложении* 42, *то*

$$P_{(a_j + b \to a_l + b;\; h(a_l))}(g(a_j)) = h \otimes g(a_l).$$

Доказательство. Так как $\omega(h) = a_j$, то предложение 16 дает $(a_l + b) + h(a_l) = (a_j + b) + h(a_l)$. Еще раз применяя предложение 16, получаем $h(a_i) \leqslant a_l + \omega(h) = a_l + a_j$. Отсюда с помощью ПЗ1 и предложения 3 выводим, что

$$(a_i + b)\,h(a_l) = (a_l + b)(a_l + a_j)\,h(a_l) = a_l h(a_l) = 0$$

и

$$(a_j + b)\,h(a_l) = (a_j + b)(a_l + a_j)\,h(a_l) = h(a_j a_l) = 0.$$

Таким образом, $h(a_l)$ действительно является осью перспективы элементов $a_i + b$ и $a_j + b$. Так как $f = h \otimes g \in H_{ljb}$ (предложение 42), то из равенства $g(a_l) = a_l$ и предложений 37 и 28 вытекает

$$g^{-1}h(a_l) = g^{-1}hg(a_l) = h(h \otimes g)(a_l) = hf(a_l) = fh(a_l), \quad (58)$$

а предложение 16 дает

$$f(a_l) \leqslant a_l + \omega(f) \leqslant a_l + b. \quad (59)$$

Принимая во внимание (58), ПЗ2, а также предложения 33 и 16, будем иметь

$$g(a_j) + h(a_l) = g(a_j + fh(a_l)) = gf(a_j + h(a_l)) =$$
$$= gf(\omega(h) + h(a_l)) = gf(a_l + h(a_l)) = f(a_l) + h(a_l).$$

Умножая это равенство на $a_l + b$ и учитывая (59) и МЗ получим

$$[g(a_j) + h(a_l)](a_l + b) = f(a_l) + h(a_l)(a_l + b) = f(a_l),$$

что и требовалось.

Предложение 44. *Если i, j, k, l все различны, $f \in G_{ij}$, $g \in G_{jk}$, $h \in G_{kl}$, то $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$.*

Доказательство. Так как

$$f \in H_{ik(a_j + a_l)}, \quad \text{а} \quad h \in H_{kl(a_l + a_j)},$$

то предложение 33 дает $fh = hf$. Поэтому

$$h^{-1}(f \otimes g)\,h = h^{-1}fgf^{-1}g^{-1}h =$$
$$= f(h^{-1}gh)\,f^{-1}(h^{-1}g^{-1}h) = f \otimes (h^{-1}gh),$$

откуда, принимая во внимание предложения 36, 37 и 38, получаем

$$(f \otimes g)[(f \otimes g) \otimes h] = h^{-1}(f \otimes g)\,h = f \otimes (h^{-1}gh) =$$
$$= f \otimes [g(g \otimes h)] = (f \otimes g)[f \otimes (g \otimes h)].$$

14. Части автоморфизмов. Пусть $f \in G_i$ и $a_i = u + v$. Согласно предложению 19, $(f(a_i))_u + v$, $u + (f(a_i))_v \in D(\bar{a}_i)$. Поэтому из предложения 29 вытекает существование в G_i единственных автоморфизмов f_u и f_v, подчиненных требованиям

$$f_u(a_i) = (f(a_i))_u + v,$$
$$f_v(a_i) = u + (f(a_i))_v.$$

Эти автоморфизмы назовем *u-частью* и *v-частью автоморфизма f* соответственно.

Предложение 45. *Если $z \in D(\bar{a}_i)$, то*

$$f_u(z) = f(z_u) + z_v.$$

В частности,

$$f_u(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x = z_u \text{ для некоторого } z \in D(\bar{a}_i), \\ x, & \text{если } x = z_v \text{ для некоторого } z \in D(\bar{a}_i). \end{cases}$$

Доказательство. Согласно предложению 29, в G_i существует автоморфизм g, для которого $g(a_i) = z$. Используя МЗ, получаем

$$z_u = z(u + \bar{a}_i) = g(a_i(u + \bar{a}_i)) = g(u),$$
$$z_v = z(v + \bar{a}_i) = g(a_i(v + \bar{a}_i)) = g(v),$$
$$(f(a_i))_u = f(a_i)(u + \bar{a}_i) = f(a_i(u + \bar{a}_i)) = f(u).$$

Поэтому, учитывая предложение 28, имеем

$$f_u(z) = f_u g(a_i) = g f_u(a_i) = g f(u) + g(v) = f(z_u) + z_v.$$

Для доказательства второй части предложения достаточно заметить, что, ввиду МЗ и СЗ, имеет место

$$(z_u)_v = z(u + \bar{a}_i)(v + \bar{a}_i) = z[\bar{a}_i + u(v + \bar{a}_i)] = z(\bar{a}_i + uv) = 0$$

и, по аналогии, $(z_v)_u = 0$.

Предложение 46. *Если $f \in G_i$, то имеет место:*

а) $[f(a_i)]_u = f(u)$;

б) $f_u(a_i) = f(u) + v$;

в) $f = f_u f_v$;

г) $\omega(f_u) \leqslant \omega(f)$;

д) $\omega(f) = \omega(f_u) + \omega(f_v)$.

Доказательство. а) Применяя МЗ, будем иметь

$$[f(a_l)]_u = f(a_l)(u + \bar{a}_l) = f(a_l(u + \bar{a}_l)) = f(u + a_l\bar{a}_l) = f(u).$$

б) Следует из а) и определения f_u.

в) Ввиду а) и б), получаем

$$f_u f_v(a_l) = f_u(u + [f(a_l)]_v) = f(u) + f(v) = f(a_l).$$

Ввиду единственности (предложение 29), отсюда следует, что $f = f_u f_v$.

г) Из б) и ПЗ2 вытекает

$$\omega(f_u) = [f_u(a_l) + a_l]\bar{a}_l = \\ = [f(u) + a_l]\bar{a}_l \leqslant [f(a_l) + a_l]\bar{a}_l = \omega(f).$$

д) Ввиду в), г) и предложения 17, имеем

$$\omega(f) = \omega(f_u f_v) \leqslant \omega(f_u) + \omega(f_v) \leqslant \omega(f).$$

Предложение 47. *Если* $f, g \in G_l$, *то* $(fg)_u = f_u g_u$.

Действительно, используя предложения 46, б), 46, а) и 45, будем иметь

$$f_u g_u(a_l) = f_u([g(a_l)]_u + v) = fg(u) + v = (fg)_u(a_l).$$

После этого остается только принять во внимание утверждение единственности в предложении 29.

Предложение 48. *Если* $f \in G_l$, *а* $g \in H_{jlb}$, *то* $f_u \otimes g = (f \otimes g)_u$.

Доказательство. Если $f_u^{-1}(u) = x$, то, ввиду предложений 46, в) и 45, имеет место $f(x) = f_v(u) = u$, т. е. $x = f^{-1}(u)$. Учитывая этот результат, а также предложения 37, 46, б), 45, 32, будем иметь

$$f_u \otimes g(a_l) = f_u^{-1}g^{-1}f_u(a_l) = f_u^{-1}g^{-1}(f(u) + v) = \\ = f_u^{-1}g^{-1}fg(u) + v = g^{-1}fgf_u^{-1}(u) + v = \\ = g^{-1}fgf^{-1}(u) + v = (f \otimes g)_u(a_l).$$

Отсюда, ввиду утверждения единственности в предложении 29, получаем, что $f_u \otimes g = (f \otimes g)_u$.

15. Репер. Объединение однородного базиса $a_1, \ldots, a_n$ и системы автоморфизмов Γ_{ij} структуры L, где $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, n$, назовем *репером* (a_i, Γ_{ij}), если имеют место следующие свойства:

P1. Γ_{ij} нормален относительно $\vec{a}_i$;

P2. $\omega(\Gamma_{ij}) = a_j$;

P3. $\Gamma_{ij}(a_i)\, a_i = 0$;

P4. Если i, j, k все различны, то $\Gamma_{ik} \otimes \Gamma_{kj} = \Gamma_{ij}$.

Заметим, что из P1 и P2 вытекает, что $\Gamma_{ij} \in G_{ij}$. Отсюда, сопоставляя предложения 31, 41, 42 и свойства P2 и P3, получаем:

Предложение 49. *Отображения $f \to \Gamma_{ki} \otimes f$ и $f \to f \otimes \Gamma_{jk}$ являются изоморфизмами G_{ij} на G_{kj} и G_{ij} на G_{ik} соответственно.*

Предложение 50. *Элемент $\Gamma_{ij}(a_i)$ является осью перспективы элементов $a_i \dotplus b$ и $a_j \dotplus b$, где b является суммой каких-либо a_k, отличных от a_i и a_j. При этом*

$$P_{(a_j \dotplus b \to a_i \dotplus b;\ \Gamma_{ij}(a_i))}(a_j) = a_i.$$

Действительно, ввиду P2 и P3, из предложения 43 вытекает

$$P_{(a_j \dotplus b \to a_i \dotplus b;\ \Gamma_{ij}(a_i))}(a_j) = (\Gamma_{ij} \otimes 1)(a_i) = a_i.$$

Предложение 51. *Если $f \in G_{ij}$, то*

$$[a_i + \Gamma_{kj}(a_k)] \dotplus a_k = [f(a_i) + \Gamma_{kj}(a_k)] \dotplus a_k$$

для всякого $k \neq i$, j.

Доказательство. Применяя P2, предложение 16 и П32, получаем

$$[f(a_i) + \Gamma_{kj}(a_k)] + a_k = f(a_i) + a_k + a_j =$$
$$= f(a_i) + \omega(f) + a_k + a_j = a_i + a_k + a_j =$$
$$= [a_i + \Gamma_{kj}(a_k)] + a_k.$$

Кроме того, П31, P2, предложение 16, М3, предложение 3 и P3 дают

$$[a_i + \Gamma_{kj}(a_k)]\, a_k = [a_i + \Gamma_{kj}(a_k)]\,(a_k + a_j)\, a_k = \Gamma_{kj}(a_k)\, a_k = 0$$

и

$$[f(a_i) + \Gamma_{kj}(a_k)]\, a_k = f([a_i + \Gamma_{kj}(a_k)]\, a_k) = 0.$$

Все доказано.

Предложение 52. *Если $x \leqslant a_j$, $u = [x + \Gamma_{ij}(a_i)]\, a_i$, $a_i = u \dotplus v$, $\varepsilon_{ij} = (\Gamma_{ij})_u$, то $\omega(\varepsilon_{ij}) = x$.*

Доказательство. Пусть $\delta_{ij}=(\Gamma_{ij})_v$. Из P2 и предложения 46, г) вытекает

$$\omega(\varepsilon_{ij})\leqslant\omega(\Gamma_{ij})=a_j\leqslant\bar{a}_i.$$

Поэтому, применяя ПЗ2, а также предложения 46, б), 46, в), 50 и 7, будем иметь

$$\begin{aligned}\omega(\varepsilon_{ij})&=\delta_{ij}(\omega(\varepsilon_{ij}))=\delta_{ij}([\varepsilon_{ij}(a_i)+a_i]\bar{a}_i)=\\&=[\Gamma_{ij}(a_i)+u+\Gamma_{ij}(v)]\bar{a}_i=[u+\Gamma_{ij}(a_i)]\bar{a}_i=x.\end{aligned}$$

Предложение 53. *Если* $f\in G_{ij}$, *то* $(f\otimes\Gamma_{jk})\otimes\Gamma_{kj}=f$ *и* $\Gamma_{ik}\otimes(\Gamma_{ki}\otimes f)=f$.

Будем доказывать первое из соотношений (второе доказывается аналогично). Положим

$$g=(f\otimes\Gamma_{jk})\otimes\Gamma_{kj}.$$

Выбрав $l\neq i,\ k,\ j$, будем иметь

$$g\otimes\Gamma_{jl}=[(f\otimes\Gamma_{jk})\otimes\Gamma_{kj}]\otimes\Gamma_{jl}.$$

Применение P4 и предложения 44 дает

$$\begin{aligned}g\otimes\Gamma_{jl}&=(f\otimes\Gamma_{jk})\otimes(\Gamma_{kj}\otimes\Gamma_{jl})=(f\otimes\Gamma_{jk})\otimes\Gamma_{kl}=\\&=f\otimes(\Gamma_{jk}\otimes\Gamma_{kl})=f\otimes\Gamma_{jl}.\end{aligned}$$

Применяя предложения 36 и 49, получим, что $g=f$.

Пусть P — точка действительной аффинной плоскости с целочисленными координатами в некоторой прямоугольной системе координат. Будем рассматривать только точки $P=(i,\ j)$, где $1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ i\neq j$, и писать G_P вместо G_{ij}. Если $P\neq Q$ и прямая PQ параллельна одной из осей, то условимся обозначать через $\overrightarrow{PQ}$ автоморфизм G_P на G_Q, определенный в предложении 49. Под $\overrightarrow{PP}$ будем понимать тождественный изоморфизм G_P на G_P. Ясно, что $\overrightarrow{P_1P_2\ldots P_m}=\overrightarrow{P_1P_2}\,\overrightarrow{P_2P_3}\ldots\overrightarrow{P_{m-1}P_m}$ является изоморфизмом G_{P_1} на G_{P_m}.

Предложение 54. *Если* $P_1=Q_1$, *а* $P_m=Q_r$, *то*

$$\overrightarrow{P_1P_2\ldots P_m}=\overrightarrow{Q_1Q_2\ldots Q_r}.$$

Сначала докажем:

Лемма. *Если точки $P_1, P_2, \ldots, P_m$ лежат на одной прямой, параллельной одной из осей, то*

$$\overrightarrow{P_1P_2 \ldots P_m} = \overrightarrow{P_1P_m}.$$

Доказательство. Лемма, очевидно, справедлива, если $m = 2$. Если $m > 2$, то, применив индуктивное предположение, получим

$$\overrightarrow{P_1P_2 \ldots P_m} = \overrightarrow{P_1P_{m-1}}\overrightarrow{P_{m-1}P_m}.$$

Если $P_1 = P_m$, то, ввиду предложения 53, отсюда следует

$$\overrightarrow{P_1P_2 \ldots P_m} = \overrightarrow{P_1P_{m-1}}\overrightarrow{P_{m-1}P_1} = 1 = \overrightarrow{P_1P_1} = \overrightarrow{P_1P_m}.$$

Если же $P_1 \neq P_m$, то допустим, что $P_1 = (i, j)$, $P_{m-1} = (i, k)$, $P_m = (i, l)$. Применяя P4 и предложение 44, получим

$$f\overrightarrow{P_1P_2 \ldots P_m} = f\overrightarrow{P_1P_{m-1}}\overrightarrow{P_{m-1}P_m} = (f \otimes \Gamma_{jk}) \otimes \Gamma_{kl} = \\ = f \otimes (\Gamma_{jk} \otimes \Gamma_{kl}) = f \otimes \Gamma_{jl} = f\overrightarrow{P_1P_m}$$

для всякого $f \in G_{ij}$, что и требовалось.

Теперь заметим, что предложение 54 равносильно следующему утверждению:

Если $P_1 = P_m$, *то* $\varphi = \overrightarrow{P_1P_2 \ldots P_m} = 1$.

Ввиду леммы, можно считать, что $P_{i-1}P_i \perp P_iP_{i+1}$.

1-й случай: $m = 5$.

Пусть $P_1 = (i, j)$, $P_2 = (i, k)$, $P_3 = (l, k)$, $P_4 = (l, j)$. Применяя предложения 44 и 53, будем иметь

$$f\overrightarrow{P_1 \ldots P_5} = \Gamma_{il} \otimes \{[\Gamma_{li} \otimes (f \otimes \Gamma_{jk})] \otimes \Gamma_{kj}\} = \\ = \{\Gamma_{il} \otimes [\Gamma_{li} \otimes (f \otimes \Gamma_{jk})]\} \otimes \Gamma_{kj} = (f \otimes \Gamma_{jk}) \otimes \Gamma_{kj} = f$$

для всякого $f \in G_{P_1}$.

Теперь будем предполагать, что $m > 5$ и что $\overrightarrow{P_1P_2 \ldots P_r} = 1$, если $P_1 = P_r$ и $r < m$. Ясно, что существуют точки

$$P_t = (i, j),\ P_{t+1} = (i, k),\ P_{t+2} = (l, k) \text{ и } P_{t+3} = (l, h).$$

2-й случай: $m > 5$, $j \neq l$ или $i \neq h$ (рис. 1).

Пусть для определенности $j \neq l$. Положим $Q = (l, j)$. Применяя случай 1, лемму и индуктивное предположение, будем иметь

$$\varphi = \overrightarrow{P_1 \ldots P_{t-1} P_t Q P_{t+2} P_{t+3} \ldots P_m} =$$
$$= \overrightarrow{P_1 \ldots P_{t-1} Q P_{t+2} \ldots P_m} = 1.$$

3-й случай: $m > 5$, $j = l$, $i = h$ (рис. 2).

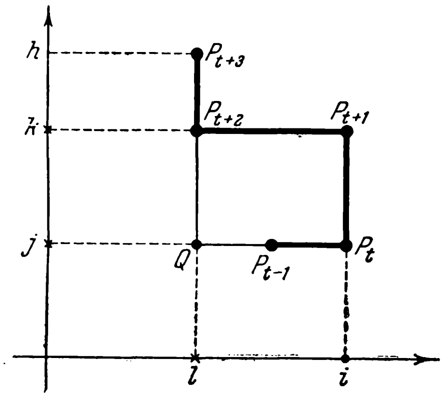

Рис. 1.

Выберем $s \neq i, j, k$ и положим $Q = (s, j)$, $R = (s, k)$ Применяя случай 1 и лемму, получим

$$\varphi = \overrightarrow{P_1 \ldots P_t P_{t+1} R P_{t+2} \ldots P_m} = \overrightarrow{P_1 \ldots P_t Q R P_{t+2} \ldots P_m} =$$
$$= \overrightarrow{P_1 \ldots P_{t-1} Q R P_{t+2} \ldots P_m}.$$

Так как $s \neq i = h$, то мы оказываемся в условиях случая 2.

Предложение 54 доказано.

Если P и Q — две точки, не лежащие на прямой $y = x$, то, очевидно, существует изоморфизм $\overrightarrow{PP_1 \ldots P_m Q}$ группы G_P на группу G_Q. Ввиду предложения 54, этот изоморфизм не зависит от выбора точек $P_1, \ldots, P_m$ и потому может быть обозначен через $\overrightarrow{PQ}$.

Для того чтобы иметь возможность применить полученные результаты к рассматриваемой структуре L, нам будет нужна

Теорема 7. *Если дедекиндова структура с дополнениями обладает однородным базисом* $a_1, \ldots, a_n$, *где* $n \geqslant 4$, *то существует репер* (a_i, Γ_{ij}).

Доказательство. Согласно предложению 34, в каждой из G_{1i} можно найти автоморфизм Γ_{1i} такой, что $\omega(\Gamma_{1i}) = a_i$, а $\Gamma_{1i}(a_1) a_1 = 0$. Из предложений 41, 42 и 31 вытекает, что $f \to \Gamma_{1i} \otimes f$ является изоморфизмом G_{ij} на G_{1j}, а $f \to f \otimes \Gamma_{1j}$ —

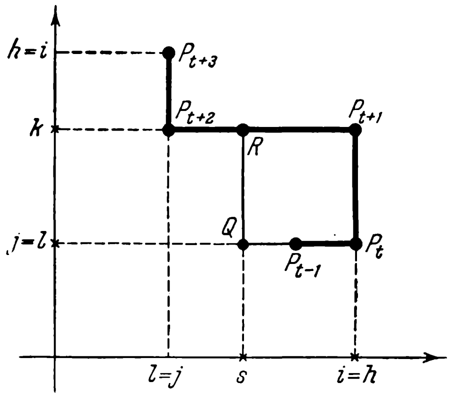

Рис. 2.

изоморфизмом G_{i1} на G_{ij}. Поэтому найдутся такие $\Gamma_{ij} \in G_{ij}$, что

$$\Gamma_{1i} \otimes \Gamma_{ij} = \Gamma_{1j}, \quad \text{где} \quad j \neq 1, i,$$

и

$$\Gamma_{i1} \otimes \Gamma_{1j} = \Gamma_{ij}, \quad \text{где} \quad j \neq 1, i.$$

Лемма 1. *Определение* Γ_{i1} *не зависит от выбора* j. *Если* i, j, k *все различны, то*

$$\Gamma_{ik} \otimes \Gamma_{kj} = \Gamma_{ij}. \tag{60}$$

Доказательство. Сначала установим справедливость формулы (60) при $i, j, k \neq 1$. В самом деле, применяя предложение 44, получим

$$\Gamma_{1i} \otimes (\Gamma_{ik} \otimes \Gamma_{kj}) = (\Gamma_{1i} \otimes \Gamma_{ik}) \otimes \Gamma_{kj} = \Gamma_{1k} \otimes \Gamma_{kj} = \Gamma_{1j} = \Gamma_{1i} \otimes \Gamma_{ij}.$$

Если, далее, $k \neq 1, i, j$, то из предложения 44 и уже доказанного случая формулы (60) следует

$$\Gamma_{i1} \otimes \Gamma_{1k} = \Gamma_{i1} \otimes (\Gamma_{1j} \otimes \Gamma_{jk}) = (\Gamma_{i1} \otimes \Gamma_{1j}) \otimes \Gamma_{jk} = \Gamma_{ij} \otimes \Gamma_{jk} = \Gamma_{ik}.$$

Таким образом, Γ_{i1} действительно не зависит от выбора j. Этим же доказана справедливость формулы (60) при $k=1$. Ее справедливость для $i=1$ вытекает из определения Γ_{lj}. Если $j=1$, то, выбирая $l \neq 1$, i, k и учитывая предложение 44 и уже доказанные случаи формулы (60), будем иметь

$$(\Gamma_{ik} \otimes \Gamma_{k1}) \otimes \Gamma_{1l} = \Gamma_{ik} \otimes (\Gamma_{k1} \otimes \Gamma_{1l}) = \Gamma_{ik} \otimes \Gamma_{kl} = \Gamma_{il} = \Gamma_{i1} \otimes \Gamma_{1l},$$

откуда $\Gamma_{ik} \otimes \Gamma_{k1} = \Gamma_{i1}$.

Лемма 2. $\omega(\Gamma_{ij}) = a_j$.

Доказательство. Справедливость леммы при $i=1$ вытекает из определения. При i, $j \neq 1$ предложение 42 дает $\omega(\Gamma_{ij}) = \omega(\Gamma_{1j}) = a_j$. Поэтому, учитывая предложение 16, получим

$$[a_i + \Gamma_{1j}(a_1)] + a_1 = a_1 + a_i + a_j = [\Gamma_{ij}(a_i) + \Gamma_{1j}(a_1)] + a_1. \tag{61}$$

Из П31, М3 и предложений 3 и 16 вытекает

$$[a_i + \Gamma_{1j}(a_1)]\, a_1 = [a_i + \Gamma_{1j}(a_1)]\,(a_1 + a_j)\, a_1 = \Gamma_{1j}(a_1)\, a_1 = 0$$

и

$$[\Gamma_{ij}(a_i) + \Gamma_{1j}(a_1)]\, a_1 = \Gamma_{ij}([a_i + \Gamma_{1j}(a_1)]\, a_1) = 0.$$

Отсюда и из (61) следует, что a_1 является осью перспективы элементов $a_i + \Gamma_{1j}(a_1)$ и $\Gamma_{ij}(a_i) + \Gamma_{1j}(a_1)$. Ввиду предложения 39, существует автоморфизм $h \in G_{i1}$ такой, что $h \otimes \Gamma_{1j} = \Gamma_{ij}$ и

$$h(a_i) = (a_i + a_1)\,[\Gamma_{ij}(a_i) + \Gamma_{1j}(a_1)]. \tag{62}$$

Из предложения 41 вытекает

$$h = \Gamma_{i1}. \tag{63}$$

Используя (62), (63), М3 и предложения 3 и 16, получаем

$$\omega(\Gamma_{i1}) = [a_i + \Gamma_{i1}(a_i)]\, \bar{a}_i = (a_i + a_1)\,[a_i + \Gamma_{ij}(a_i) + \Gamma_{1j}(a_1)]\, \bar{a}_i =$$
$$= (a_i + a_1)(a_i + a_j + a_1)\, \bar{a}_i = a_1.$$

Лемма 3. $\Gamma_{ij}(a_i)\, a_i = 0$.

Доказательство. Равенство $\Gamma_{1j}(a_1)\, a_1 = 0$ справедливо по определению. Если i, $j \neq 1$, то из равенства $\Gamma_{1i} \otimes \Gamma_{ij} = \Gamma_{1j}$ и предложения 43 вытекает

$$\Gamma_{1j}(a_1) = P_{(a_i + a_j \to a_1 + a_j;\ \Gamma_{1i}(a_1))}(\Gamma_{ij}(a_i)).$$

В силу предложения 7, отсюда следует

$$\Gamma_{lj}(a_l) = P_{(a_1+a_j \to a_l+a_j;\ \Gamma_{1l}(a_1))}(\Gamma_{1j}(a_1)).$$

Кроме того, предложения 16 и 3 дают

$$P_{(a_1+a_j \to a_l+a_j;\ \Gamma_{1l}(a_1))}(a_1) = [a_1 + \Gamma_{1l}(a_1)](a_l + a_j) =$$
$$= (a_1 + a_l)(a_l + a_j) = a_l.$$

Поэтому

$$\Gamma_{lj}(a_l)\,a_l = P_{(a_1+a_j \to a_l+a_j;\ \Gamma_{1l}(a_1))}(\Gamma_{1j}(a_1)\,a_1) = 0.$$

Наконец, из предложений 3 и 16 вытекает

$$[a_l + \Gamma_{lj}(a_l)]\,\Gamma_{1j}(a_1) = \Gamma_{1j}([a_l + a_j]\,a_1) = 0.$$

Ввиду С3, (62) и (63), отсюда вытекает

$$\Gamma_{l1}(a_l)\,a_l = [\Gamma_{lj}(a_l) + \Gamma_{1j}(a_1)]\,a_l = \Gamma_{lj}(a_l)\,a_l = 0,$$

что и требовалось.

Теорема 7 является непосредственным следствием доказанных лемм.

16. Вспомогательное кольцо. Пусть $\mathfrak{R}$ — группа, изоморфная G_{12} (а значит, и всем G_{ij}). Группа $\mathfrak{R}$ абелева (предложение 26). Обозначим операцию в ней через $\oplus$ (не путать с аналогичным значком в § 3!), а через Φ — изоморфизм $\mathfrak{R}$ на G_{12}. Если $\alpha \in \mathfrak{R}$, $P = (1, 2)$, $Q = (i, j)$, $i \neq j$, то положим

$$\alpha_{ij} = \alpha\Phi\overrightarrow{PQ}.$$

Если $R = (r, t)$, $r \neq t$, то, ввиду результатов п. 15, имеем

$$\alpha_{ij}\overrightarrow{QR} = \alpha\Phi\overrightarrow{PQ}\,\overrightarrow{QR} = \alpha\Phi\overrightarrow{PR} = \alpha_{rt}. \tag{64}$$

Отсюда следует, что если $i \neq t$ и $r \neq k$, то

$$\alpha_{ik} \otimes \Gamma_{kt} = \alpha_{it} \tag{65}$$

и

$$\Gamma_{ri} \otimes \alpha_{ik} = \alpha_{rk}. \tag{66}$$

Докажем, что при $i \neq j$ и $r \neq t$ имеют место формулы:

$$\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj} = \alpha_{il} \otimes \beta_{lj}, \tag{67}$$

$$(\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj})\,\overrightarrow{QR} = \alpha_{rl} \otimes \beta_{lt}. \tag{68}$$

Так как в равенстве (67) можно считать, что $k \neq l$, то, применяя предложения 44 и 53, а также формулы (65) и (66), получим

$$\alpha_{lk} \otimes \beta_{kj} = (\alpha_{il} \otimes \Gamma_{lk}) \otimes (\Gamma_{kl} \otimes \beta_{lj}) = \\ = [(\alpha_{il} \otimes \Gamma_{lk}) \otimes \Gamma_{kl}] \otimes \beta_{lj} = \alpha_{il} \otimes \beta_{lj}.$$

Если $f \in G_{ki}$, то положим

$$f \otimes \Delta_{ij} = \begin{cases} f \otimes \Gamma_{ij}, & \text{если } i,\ k \neq j, \\ f, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

и

$$\Delta_{jk} \otimes f = \begin{cases} \Gamma_{jk} \otimes f, & \text{если } k,\ i \neq j, \\ f, & \text{если } j = k. \end{cases}$$

Если $i \neq t$ и $r \neq j$, то, выбрав $h \neq i,\ j,\ t$ и $m \neq r,\ i,\ t$ и принимая во внимание предложение 44 и формулы (65), (66), (67), будем иметь

$$(\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \overrightarrow{QR} = \Delta_{ri} \otimes [(\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \otimes \Delta_{jt}] = \Delta_{ri} \otimes [(\alpha_{ih} \otimes \beta_{hj}) \otimes \Delta_{jt}] = \\ = \Delta_{ri} \otimes (\alpha_{ih} \otimes \beta_{ht}) = \Delta_{ri} \otimes (\alpha_{im} \otimes \beta_{mt}) = \alpha_{rm} \otimes \beta_{mt} = \alpha_{rl} \otimes \beta_{lt}.$$

Если $(r,\ t) = (j, i)$, то положим $U = (h,\ m)$, где $h,\ m \neq i,\ j$, и выберем $p \neq h,\ m$. Применяя уже доказанный случай формулы (68), будем иметь

$$(\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \overrightarrow{QR} = (\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \overrightarrow{QU}\, \overrightarrow{UR} = (\alpha_{hp} \otimes \beta_{pm}) \overrightarrow{UR} = \alpha_{rl} \otimes \beta_{lt}.$$

Если $i = t$, но $r \neq j$, то, выбрав $h \neq i,\ j,\ r$ и $p \neq r,\ h$, полагая $V = (r,\ h)$ и учитывая уже доказанное, получим

$$(\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \overrightarrow{QR} = (\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \overrightarrow{QV}\, \overrightarrow{VR} = (\alpha_{rp} \otimes \beta_{ph}) \overrightarrow{VR} = \alpha_{rl} \otimes \beta_{lt}.$$

Аналогично рассматривается случай $i \neq t,\ r = j$.

Введем в $\mathfrak{R}$ вторую операцию:

$$\alpha \circ \beta = (\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \overrightarrow{QP} \Phi^{-1}.$$

Из формулы (68) вытекает

$$(\alpha_{rl} \otimes \beta_{lt}) \overrightarrow{RP} = (\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \overrightarrow{QR}\, \overrightarrow{RP} = (\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}) \overrightarrow{QP},$$

что доказывает корректность определения операции.

Теорема 8. *Множество $\mathfrak{R}$ с операциями $\oplus$ и $\circ$ является регулярным кольцом. Структура его главных левых идеалов изоморфна структуре L_{a_j}. Этот изоморфизм осуществляется посредством соответствия* $\mathfrak{R}\alpha \longleftrightarrow \omega(\alpha_{ij})$ [1]).

Доказательство. Выбрав $k \neq i$, j и применяя предложение 38, получим

$$[(\alpha \oplus \beta) \circ \gamma]_{ij} = (\alpha \oplus \beta)_{ik} \otimes \gamma_{kj} = \alpha_{ik}\beta_{ik} \otimes \gamma_{kj} =$$
$$= (\alpha_{ik} \otimes \gamma_{kj})(\beta_{ik} \otimes \gamma_{kj}) = (\alpha\gamma)_{ij}(\beta\gamma)_{ij} = [\alpha\gamma \oplus \beta\gamma]_{ij},$$

что доказывает справедливость правого дистрибутивного закона. Наличие левой дистрибутивности проверяется аналогично. Для доказательства ассоциативности умножения выберем $k \neq i$, j и $l \neq i$, j, k и применим предложение 44:

$$[(\alpha\beta)\gamma]_{ij} = (\alpha\beta)_{ik} \otimes \gamma_{kj} = (\alpha_{il} \otimes \beta_{lk}) \otimes \gamma_{kj} =$$
$$= \alpha_{il} \otimes (\beta_{lk} \otimes \gamma_{kj}) = \alpha_{il} \otimes (\beta\gamma)_{lj} = [\alpha(\beta\gamma)]_{ij}.$$

Таким образом, мы установили, что $\mathfrak{R}$ является ассоциативным кольцом. Единицей этого кольца служит $\Gamma_{12}\Phi^{-1}$.

Теперь заметим, что, ввиду предложения 42,

$$\omega(\alpha_{ij}) = \omega(\Gamma_{ki} \otimes \alpha_{ij}) = \omega(\alpha_{kj}).$$

Кроме того, поскольку $\mathfrak{R}\alpha \leqslant \mathfrak{R}\beta$ равносильно $\alpha_{ij} = \xi_{ik} \otimes \beta_{kj}$ для некоторого $\xi \in \mathfrak{R}$, то из предложения 40 следует, что $\mathfrak{R}\alpha \leqslant \mathfrak{R}\beta$ имеет место тогда и только тогда, когда $\omega(\alpha_{ij}) \leqslant \leqslant \omega(\beta_{ij})$. Поэтому отображение

$$\mathfrak{R}\alpha \longleftrightarrow \omega(\alpha_{ij}),$$

где j — фиксированный индекс, а i — произвольный индекс, отличный от j, является изоморфизмом структуры главных левых идеалов кольца $\mathfrak{R}$ в структуру L_{a_j}. Из предложения 52 вытекает, что это отображение является изоморфизмом на L_{a_j}. Остается заметить, что регулярность кольца $\mathfrak{R}$ вытекает из теоремы 1.

Легко понять, что кольцо $\mathfrak{R}$ вполне определяется выбором репера (a_i, Γ_{ij}). Поэтому оно называется *вспомогательным кольцом, определяемым репером* (a_i, Γ_{ij}).

---

[1]) Amemiya [1].

Предложение 55. *Если i, j, k различны, то*

$$\omega(\alpha_{ik}) = [\omega(\alpha_{ij}) + \Gamma_{kj}(a_k)]\, a_k.$$

Доказательство. Ввиду предложения 51, к $\alpha_{ij} \in H_{ika_j}$ и $\Gamma_{kj} \in H_{kia_j}$ можно применить предложение 39. Поэтому, учитывая равенство $\alpha_{ij} = \alpha_{ik} \otimes \Gamma_{kj}$, будем иметь

$$\alpha_{ik}(a_i) = P_{(a_i + \Gamma_{kj}(a_k) \to \alpha_{ij}(a_i) + \Gamma_{kj}(a_k);\ a_k)}(a_i) = \\ = (a_i + a_k)[\alpha_{ij}(a_i) + \Gamma_{kj}(a_k)].$$

Кроме того, из P2 и предложения 16 следует, что $\Gamma_{kj}(a_k) \leqslant \leqslant a_k + a_j \leqslant \bar{a}_i$. Отсюда, принимая во внимание M3 и предложение 3, получаем

$$\omega(\alpha_{ik}) = [\alpha_{ik}(a_i) + a_i]\, \bar{a}_i = [a_i + \alpha_{ij}(a_i) + \\ + \Gamma_{kj}(a_k)](a_i + a_k)\, \bar{a}_i = \{[a_i + \alpha_{ij}(a_i)]\, \bar{a}_i + \Gamma_{kj}(a_k)\}\, a_k = \\ = [\omega(\alpha_{ij}) + \Gamma_{kj}(a_k)]\, a_k.$$

Если $h \in G_i$, то из предложения 29 следует, что

$$h = \eta_{i1}^{(1)} \ \ldots \ \eta_{ii-1}^{(i-1)} \eta_{ii+1}^{(i+1)} \ \ldots \ \eta_{in}^{(n)},$$

где $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)} \in \mathfrak{R}$. Положим

$$\varepsilon h = (\varepsilon \circ \eta^{(1)})_{i1} \ \ldots \ (\varepsilon \circ \eta^{(n)})_{in}. \qquad (69)$$

Предложение 56. *Пусть* $a_i = u \dotplus v$, $\varepsilon_{ij} = (\Gamma_{ij})_u$, $h \in G_i$. *Тогда*: а) $h_u = \varepsilon h$; б) $\omega(\varepsilon_{ki}) = u$; в) $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$; г) $h_v = (1 - \varepsilon) h$; д) $\omega(h) = \omega(\varepsilon h) + \omega((1 - \varepsilon) h)$.

Доказательство. Если $k \neq i, j$, то формула (65), предложение 48 и свойство P4 дают

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ij} \otimes \Gamma_{jk} = (\Gamma_{ij})_u \otimes \Gamma_{jk} = (\Gamma_{ij} \otimes \Gamma_{jk})_u = (\Gamma_{ik})_u. \qquad (70)$$

Пусть, далее, $\eta \in \mathfrak{R}$, а $k \neq i, j$. Применяя формулы (66) и (70), а также предложение 48, будем иметь

$$(\eta_{ij})_u = (\Gamma_{ik} \otimes \eta_{kj})_u = \varepsilon_{ik} \otimes \eta_{kj} = (\varepsilon \circ \eta)_{ij}.$$

Сопоставляя этот результат с (69) и применяя предложение 47, приходим к $h_u = \varepsilon h$.

Переходя к доказательству б), заметим, что из предложения 42 вытекает

$$\omega(\varepsilon_{kj}) = \omega(\Gamma_{ki} \otimes \varepsilon_{ij}) = \omega(\varepsilon_{ij}).$$

Поэтому, применяя предложения 55 и 52, получаем

$$\omega(\varepsilon_{ki}) = [\omega(\varepsilon_{kj}) + \Gamma_{ij}(a_i)]\, a_l = [\omega(\varepsilon_{ij}) + \Gamma_{ij}(a_l)]\, a_l = u.$$

Наконец, из предложений 46, б) и 45 следует, что

$$(\varepsilon_{ij})_u(a_i) = \varepsilon_{ij}(u) + v = \varepsilon_{ij}(a_i).$$

Отсюда, ввиду предложения 29, вытекает, что $(\varepsilon_{ij})_u = \varepsilon_{ij}$. Поэтому, учитывая а), будем иметь

$$(\varepsilon \circ \varepsilon)_{ij} = \varepsilon\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_u = \varepsilon_{ij}.$$

Чтобы установить справедливость г), заметим, что из а), предложения 29, определения сложения в $\mathfrak{R}$ и предложения 46, в) вытекает

$$h_u(1-\varepsilon)\,h = \varepsilon h(1-\varepsilon)\,h = \prod_{k\neq i}(\varepsilon \circ \eta^{(k)})_{ik}\,((1-\varepsilon)\circ\eta^{(k)})_{ik} =$$
$$= \prod_{k\neq i}[\varepsilon\circ\eta^{(k)} \oplus (1-\varepsilon)\circ\eta^{(k)}]_{ik} = \prod_{k\neq i}\eta^{(k)} = h = h_u h_v.$$

Справедливость же д) является непосредственным следствием а), г) и предложения 46, д).

Теорема 9. *Пусть L и L^*—дедекиндовы структуры с дополнениями, обладающие однородными базисами $a_1, \ldots, a_n$ и $a_1^*, \ldots, a_n^*$, причем $n \geqslant 4$; $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^*$ — вспомогательные кольца, определяемые реперами (a_i, Γ_{ij}) и (a_i^*, Γ_{ij}^*) соответственно. Тогда изоморфизм колец $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^*$ влечет изоморфизм структур L и L^*.*

Доказательство. Согласно предложению 50, существуют перспективы φ_i, $i = 2, \ldots, n$, с осью $\Gamma_{i1}(a_i)$, отображающие $L_{\bar{a}_i}$ на $L_{\bar{a}_1}$. Кроме того, для всякого $x \leqslant a_1$, ввиду предложения 52, имеет место $x = \omega(\varepsilon_{l1})$, где $\varepsilon_{l1} = (\Gamma_{i1})_{\varphi_i^{-1}(x)}$. Поэтому, приступая к построению отображения $x \to x^*$ структуры L на L^*, можно положить

$$x^* = \omega(\varepsilon_{l1}^*). \tag{71}$$

Ввиду теоремы 8, построенное отображение является изоморфизмом структуры L_{a_1} на $L_{a_1^*}$. Если $x \leqslant a_i$, $i \neq 1$, то положим

$$x^* = \varphi_i^*([\varphi_i^{-1}(x)]^*). \tag{72}$$

Ясно, что $x \to x^*$ является изоморфизмом структуры L_{a_i} на $L_{a_i^*}$. Таким образом, мы построили изоморфные отображения структур L_{a_i} на $L_{a_i^*}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если $\alpha \in \mathfrak{R}$, то из предложения 52 вытекает, что $\omega(\alpha_{i1}) = \omega(\varepsilon_{i1})$, где $\varepsilon_{i1} = (\Gamma_{i1})_{\varphi_i^{-1}(\omega(\alpha_{i1}))}$. Ввиду теоремы 8, левые идеалы $\mathfrak{R}\alpha$ и $\mathfrak{R}\varepsilon$ кольца $\mathfrak{R}$ совпадают. Но тогда, очевидно, совпадают и левые идеалы $\mathfrak{R}^*\alpha^*$ и $\mathfrak{R}^*\varepsilon^*$ кольца $\mathfrak{R}^*$, а стало быть, $\omega(\alpha_{i1}^*) = \omega(\varepsilon_{i1}^*)$. Кроме того, из предложения 55 следует, что

$$\omega(\alpha_{ij}) = [\omega(\alpha_{i1}) + \Gamma_{j1}(a_j)]\,\bar{a}_1 = \varphi_j(\omega(\alpha_{i1})) = \varphi_j(\omega(\varepsilon_{i1})).$$

Учитывая эти результаты, а также равенства (71) и (72), будем иметь

$$[\omega(\alpha_{ij})]^* = [\varphi_j(\omega(\varepsilon_{i1}))]^* = \varphi_j^*(\omega(\varepsilon_{i1}^*)) = \varphi_j^*(\omega(\alpha_{i1}^*)) = \omega(\alpha_{ij}^*),$$

т. е.

$$[\omega(\alpha_{ij})]^* = \omega(\alpha_{ij}^*). \tag{73}$$

Теперь заметим, что способ построения вспомогательного кольца позволяет построить изоморфное отображение

$$f = \alpha_{ij} \to \alpha_{ij}^* = f^* \tag{74}$$

каждой из групп G_{ij} на соответствующую группу G_{ij}^*. Так как, согласно предложению 29, G_i является прямой суммой групп G_{ij}, то отображение * можно продолжить до изоморфизма G_i на G_i^*.

Введем обозначения: $S_i = L_{a_1 + \ldots + a_i}$ и $G_{(i)} = \{f;\ f \in G_i,\ \omega(f) \in S_{i-1}\}$. Если $f \in G_{ij}$, $g \in G_j$ и $\omega(g) \in S_{i-1}$, то имеет место

$$(f \otimes g)^* = f^* \otimes g^*. \tag{75}$$

Действительно, из предложений 29 и 31 вытекает, что $f = \alpha_{ij}$, а $g = \beta_{j1} \ldots \gamma_{j\,i-1}$ для подходящих $\alpha, \beta, \ldots, \gamma \in \mathfrak{R}$. Поэтому, применяя (74) и предложение 38, будем иметь

$$(f \otimes g)^* = (\alpha_{ij} \otimes \beta_{j1} \ldots \gamma_{j\,i-1})^* = [(\alpha \circ \beta)_{i1} \ldots (\alpha \circ \gamma)_{i\,i-1}]^* =$$
$$= (\alpha^* \circ \beta^*)_{i1} \ldots (\alpha^* \circ \gamma^*)_{i\,i-1} = f^* \otimes g^*.$$

Из (75), принимая во внимание f, $f \otimes g \in G_i$, получаем

$$(g^{-1}fg)^* = [f\,(f \otimes g)]^* = f^*\,(f^* \otimes g^*) = g^{*-1} f^* g^* \tag{76}$$

для любых $f \in G_{ij}$ и $g \in G_{(j)}$, где $j < i$.

Теперь будем строить изоморфизмы $\theta_i : x \to x^*$ структуры S_i на S_i^* такие, что

$$[\omega(f)]^* = \omega(f^*), \tag{77}$$

если $f \in G_{(i+1)}$. Так как при $i = 1$ равенство (77) вытекает из (73), то за θ_1 можно принять отображение, определяемое формулой (71). Далее будем строить θ_i, считая, что θ_{i-1} уже построен и $\theta_{i-1}(x) = x^*$ для всех $x \in L_{ak}$, где $k = 1, \ldots, i-1$.

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений. Если αh, где $\alpha \in \mathfrak{R}$, а $h \in G_i$, имеет тот же смысл, что и в (69), то

$$(\alpha h)^* = \alpha^* h^*. \tag{78}$$

Действительно, учитывая определение (74), получаем

$$(\alpha h)^* = \prod_{k \neq i} [\alpha \circ \eta^{(k)}]^*_{ik} = \prod_{k \neq i} (\alpha^* \circ \eta^{(k)*})_{ik} = \alpha^* h^*.$$

Лемма 1. *Если ε — идемпотент кольца R, то $\varepsilon_{ij} = (\Gamma_{ij})_{\omega(\varepsilon_{ki})}$ для всякого $k \neq i, j$.*

Доказательство. Пусть $\delta = 1 - \varepsilon$. Для сокращения записи положим $\omega(\varepsilon_{ki}) = \omega_1$ и $\omega(\delta_{ki}) = \omega_2$. Так как $R\varepsilon \dot{+} R\delta = R$, то из теоремы 8 вытекает, что $\omega_1 \dot{+} \omega_2 = a_i$. Так как $\delta \circ \varepsilon = 0$, то

$$\varepsilon_{ki} \otimes \delta_{ij} = (\varepsilon \circ \delta)_{kj} = 0_{kj} = 1,$$

откуда $\varepsilon_{ki}\delta_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_{ki}$. Учитывая этот результат и предложение 16, получим

$$\delta_{ij}(\omega_1) = \delta_{ij}([\varepsilon_{ki}(a_k) + a_k]\, a_i) \leqslant [\varepsilon_{ki}\delta_{ij}(a_k) + \delta_{ij}(a_k)](a_i + a_j) \leqslant$$
$$\leqslant [\varepsilon_{ki}(a_k) + a_k]\, \bar{a}_k = \omega_1.$$

Так как δ_{ij} нормален относительно $\bar{a}_i$, то, в силу предложения 4,

$$\delta_{ij}(\omega_1) + (\omega_2 + \bar{a}_i) = \delta_{ij}(\omega_1 + \omega_2 + \bar{a}_i) = 1 = \omega_1 \dot{+} (\omega_2 + \bar{a}_i)$$

и

$$\delta_{ij}(\omega_1)(\omega_2 + \bar{a}_i) = \delta_{ij}(\omega_1(\omega_2 + \bar{a}_i)) = 0.$$

Применив НЗ, будем иметь $\delta_{ij}(\omega_1) = \omega_1$. Аналогично проверяется, что $\varepsilon_{ij}(\omega_2) = (\omega_2)$.

Отсюда с помощью предложения 46, б) приходим к

$$\varepsilon_{lj}(a_l)=\varepsilon_{lj}(\omega_1)+\omega_2=\varepsilon_{lj}(\delta_{lj}(\omega_1))+\omega_2=$$
$$=\Gamma_{lj}(\omega_1)+\omega_2=(\Gamma_{lj})_{\omega_1}(a_l),$$

так что остается только применить предложение 29.

Лемма 2. *Если $h\in G_{(l)}$, x, $y\leqslant a_l$, u, $v\in S_{l-1}$, то соотношение $h(x)+u\leqslant y+v$ имеет место одновременно с $h^*(x^*)+u^*\leqslant y^*+v^*$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что из

$$h(x)+u\leqslant y+v \tag{79}$$

вытекает $h^*(x^*)+u^*\leqslant y^*+v^*$.

Умножая (79) на $b=a_1+\ldots+a_{l-1}$ и учитывая МЗ, а также соотношения $h(x)b=h(xb)\leqslant h(a_lb)=0$ и $yb\leqslant \leqslant a_lb=0$, получаем $u\leqslant v$. Следовательно,

$$u^*\leqslant v^*. \tag{80}$$

Далее заметим, что из (79) вытекает $h(x)\leqslant y+\bar{a}_l$. Применив к обеим частям этого неравенства $\overset{-1}{h}$, будем иметь $x\leqslant y+\bar{a}_l$. Отсюда после умножения на a_l и применения ПЗ1 и МЗ получаем, что $x\leqslant y$. Следовательно, $x^*\leqslant y^*+\bar{a}_l^*$, откуда

$$h^*(x^*)\leqslant y^*+\bar{a}_l^*. \tag{81}$$

Согласно предложениям 56, б) и 56, в), в $\mathfrak{R}$ найдется такой идемпотент ε, что $\omega(\varepsilon_{kl})=x$, а $\varepsilon_{ij}=(\Gamma_{ij})_x$. При этом из предложения 56, а) вытекает, что $\varepsilon h=h_x$. Учитывая предложение 46, б) и соотношение (79), приходим к

$$\varepsilon h(a_l)=h_x(a_l)\leqslant h(x)+a_l\leqslant y+a_l+v=a_l+v.$$

Поэтому

$$\omega(\varepsilon h)=[\varepsilon h(a_l)+a_l]\,\bar{a}_l\leqslant(a_l+v)\,\bar{a}_l=v+a_l\bar{a}_l=v\in S_{l-1},$$

откуда, ввиду (77) и (78), следует, что

$$\omega(\varepsilon^*h^*)=[\omega(\varepsilon h)]^*\leqslant v^*. \tag{82}$$

Так как ε^* — идемпотент, а ввиду (73)

$$\omega\left(\varepsilon_{kl}^*\right)=\left[\omega\left(\varepsilon_{kl}\right)\right]^*=x^*,$$

то, согласно лемме 1, $\varepsilon^*_{ij} = (\Gamma^*_{ij})_{x^*}$. Применяя предложение 56, а), приходим к $\varepsilon^* h^* = h^*_{x^*}$. Поэтому из (82) и предложений 46, б) и 16 вытекает

$$h^*(x^*) \leqslant h^*_{x^*}(a^*_l) = \varepsilon^* h^*(a^*_l) \leqslant a^*_l + v^*.$$

Сопоставляя этот результат с (81) и дважды применяя М3, получаем

$$h^*(x^*) \leqslant (a^*_l + v^*)(y^* + \overline{a}^*_l) = y^* + (a^*_l + v^*)\overline{a}^*_l = y^* + v^*.$$

Отсюда с помощью (80) приходим к

$$h^*(x^*) + u^* \leqslant y^* + v^*.$$

Лемма 3. *Если $z \in S_l$, то найдутся такие $f \in G_{(l)}$, $x \leqslant a_l$ и $u \in S_{l-1}$, что $z = f(x) + u$.*

Доказательство. Пусть $b = a_1 \dotplus \ldots \dotplus a_{l-1}$, $c = b \dotplus a_l$, $u = zb$, $z = u \dotplus y$. Обозначим через y' дополнение элемента $y + b$ в c. Тогда, применяя П31, предложение 3 и С3, будем иметь

$$(y + y')\,\overline{a}_l = (y + y')\,c\overline{a}_l = (y + y')\,b = yb = yzb = yu = 0.$$

Так как

$$(y + y') + \overline{a}_l = y + b + y' + \overline{a}_l = c + \overline{a}_l = 1,$$

то $y + y' \in D(\overline{a}_l)$. Ввиду предложения 29, в G_l найдется такой автоморфизм f, что $f(a_l) = y + y'$. При этом

$$\omega(f) = [f(a_l) + a_l]\,\overline{a}_l \leqslant c\overline{a}_l = b \in S_{l-1}.$$

Положив $x = f^{-1}(y) \leqslant a_l$, убедимся в справедливости леммы. Теперь приступим к построению искомого изоморфизма.

Лемма 3 позволяет определить отображение S_l на S^*_l посредством

$$[f(x) + u]^* = f^*(x^*) + u^*, \tag{83}$$

где $f \in G_{(l)}$, $x \leqslant a_l$, $u \in S_{l-1}$. Если $f(x) + u \leqslant g(y) + v$, где f, $g \in G_{(l)}$, x, $y \leqslant a_l$, u, $v \in S_{l-1}$, то $g^{-1}f(x) + u \leqslant y + v$. Отсюда, согласно лемме 2, следует, что $g^{*-1}f^*(x^*) + u^* \leqslant y^* + v^*$, т. е. $f^*(x^*) + u^* \leqslant g^*(x^*) + v^*$. Этим показано, что отображение (83) сохраняет порядок.

Теперь докажем справедливость свойства (77).

1-й случай: $\omega(f) \in S_{i-1}$. Ввиду предложения 42, $\Gamma_{i\,i+1} \otimes f \in G_{(i)}$. Поэтому из предложения 42, индуктивного предположения и соотношения (75) вытекает

$$[\omega(f)]^* = [\omega(\Gamma_{i\,i+1} \otimes f)]^* = \omega\left(\Gamma^*_{i\,i+1} \otimes f^*\right) = \omega(f^*).$$

2-й случай: $f = g^{-1}\alpha_{i+1\,i}g$, где $g \in G_{(i)}$, $\alpha \in \mathfrak{R}$. Предложение 32, индуктивное предположение, а также соотношения (83), (73) и (76) дают

$$[\omega(f)]^* = [g^{-1}(\omega(\alpha_{i+1\,i}))]^* = g^{*-1}\left(\omega\left(\alpha^*_{i+1\,i}\right)\right) =$$
$$= \omega\left(g^{*-1}\alpha^*_{i+1\,i}g^*\right) = \omega(f^*).$$

Общий случай. Если $f \in G_{(i+1)}$, то, согласно предложению 29,

$$f = \alpha_{i+1\,i}h, \quad \text{где} \quad \alpha \in \mathfrak{R}, \quad \text{а} \quad \omega(h) \in S_{i-1}.$$

Ввиду теоремы 1, найдется такой идемпотент ε, что $\alpha\mathfrak{R} = \varepsilon\mathfrak{R}$. Следовательно, в $\mathfrak{R}$ найдутся такие элементы β и γ, что $\alpha \circ \beta = \varepsilon$, а $\varepsilon \circ \gamma = \alpha$. Поэтому

$$\varepsilon \circ \alpha = \varepsilon \circ (\varepsilon \circ \gamma) = \varepsilon \circ \gamma = \alpha. \tag{84}$$

Положив $g = \Gamma_{i\,i+1} \otimes \beta h$ и учитывая предложение 38, будем иметь

$$\alpha_{i+1\,i} \otimes g = \alpha_{i+1\,i} \otimes \left(\Gamma_{i,\,i+1} \otimes \prod_{k=1}^{i-1} (\beta \circ \eta^{(k)})_{i+1\,k}\right) =$$
$$= \alpha_{i+1\,i} \otimes \prod_{k=1}^{i-1} (\beta \circ \eta^{(k)})_{ik} = \prod_{k=1}^{i-1} ((\alpha \circ \beta) \circ \eta^{(k)})_{ik} =$$
$$= \prod_{k=1}^{i-1} (\varepsilon \circ \eta^{(k)})_{ik} = \varepsilon h.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (84) и предложение 37, получим

$$\varepsilon f = (\varepsilon \circ \alpha)_{i+1\,i}(\varepsilon h) = \alpha_{i+1\,i}(\alpha_{i+1\,i} \otimes g) = g^{-1}\alpha_{i+1\,i}g.$$

Следовательно, автоморфизм εf находится в условиях второго случая. Отсюда, ввиду (78), вытекает

$$[\omega(\varepsilon f)]^* = \omega(\varepsilon^* f^*). \tag{85}$$

С другой стороны, учитывая равенство (84), лемму 1, предложения 56, г) и 46, г), имеем

$$\omega((1-\varepsilon)f) = \omega\left(((1-\varepsilon) \circ \alpha)_{i+1\,i}(1-\varepsilon)h\right) =$$
$$= \omega((1-\varepsilon)h) \leqslant \omega(h) \in S_{i-1}.$$

Стало быть, $(1-\varepsilon) f$ находится в условиях первого случая, откуда, учитывая (78), получаем

$$[\omega((1-\varepsilon) f)]^* = \omega((1-\varepsilon^*) f^*).$$

Применяя это равенство, соотношение (85), лемму 1 и предложение 56, д), будем иметь

$$[\omega(f)]^* = [\omega(\varepsilon f) + \omega((1-\varepsilon) f)]^* =$$
$$= \omega(\varepsilon^* f^*) + \omega((1-\varepsilon^*) f^*) = \omega(f^*).$$

Таким образом, отображение, определяемое равенством (83), можно принять за θ_i. Легко понять, что θ_n осуществляет отображение L на L^*, что и требовалось.

17. Координатизация структуры (вторая основная теорема).

Теорема 10. *Всякая дедекиндова структура с дополнениями, обладающая однородным базисом ранга $n \geqslant 4$, изоморфна структуре L подмодулей конечного происхождения левого модуля R^n n-мерных строк над некоторым регулярным кольцом R* [1]).

Для доказательства достаточно принять во внимание теоремы 8 и 9, а также следующее утверждение:

Если $e_i = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$, $a_i = Re_i$,

$$\Phi_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_k - e_j, & \textit{если} \quad k = i, \\ e_k, & \textit{если} \quad k \neq i, \end{cases}$$

то (a_i, Γ_{ij}), *где*

$$\Gamma_{ij}(T) = \sum_{t \in T} R\Phi_{ij}(t),$$

является репером. Вспомогательное кольцо, определяемое этим репером, совпадает с R.

Для его доказательства условимся обозначать через $x^{\langle i \rangle}$ элемент $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, 0, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)$, если $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Если θ — автоморфизм модуля R^n, то, как легко проверить, отображение $A \to \theta(A) = \sum_{x \in A} R\theta(x)$ является автоморфизмом структуры L. Заметим еще, что, согласно теореме 4, элементы $a_1, \ldots, a_n$ образуют однородный базис структуры $\mathfrak{L}(R^n)$.

---

[1]) Neumann [4], [6]; Kodaira, Furuya [1]; Maeda [5], [7]; Fryer, Halperin [1]—[3]; Amemiya [1].

Установим некоторые факты.

(а) *Если B — дополнение элемента $\bar{a}_i$, то найдется такой элемент $x_0 \in B$, что $x_0 = x_0^{\langle i \rangle} + e_i$, а всякий $x \in B$ представим в форме $x = \alpha x_0$, где $\alpha \in R$.*

Действительно, пусть I — множество элементов из R, являющихся i-й координатой какой-либо строки из B. Ясно, что I — левый идеал. Если бы существовал $\alpha \notin I$, то $\alpha e_i \notin \bar{a}_i + B = R^n$. Следовательно, $I = R$ и в B найдется элемент $x_0 = x_0^{\langle i \rangle} + e_i$. Пусть теперь $x = x^{\langle i \rangle} + \alpha e_i \in B$. Тогда

$$x - \alpha x_0 = x^{\langle i \rangle} - \alpha x_0^{\langle i \rangle} \in B \cap \bar{a}_i = 0, \quad \text{т. е.} \quad x = \alpha x_0.$$

Положим

$$\alpha_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_k - \alpha e_j, & \text{если} \quad k = i, \\ e_k, & \text{если} \quad k \neq i. \end{cases}$$

(б) *Автоморфизм α_{ij} нормален относительно $\bar{a}_i$, причем $\omega(\alpha_{ij}) = R\alpha e_j$.*

Пусть $A \geqslant \bar{a}_i$, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $y = \xi_i \alpha e_j$. Тогда

$$\alpha_{ij}(x) = x^{\langle j \rangle} + (\xi_j - \xi_i \alpha) e_j.$$

Ясно, что $\alpha_{ij}(y) = y \in \bar{a}_i \leqslant A$. Поэтому $y \in A \cap \alpha_{ij}(A)$.

Если $x \in A$, то $\alpha_{ij}(x) = x - y \in A$ и $x = \alpha_{ij}(x) + y \in \alpha_{ij}(A)$.

Следовательно, $\alpha_{ij}(A) \leqslant A \leqslant \alpha_{ij}(A)$, т. е. $\alpha_{ij}(A) = A$, если $A \geqslant \bar{a}_i$. Ясно, что $\alpha_{ij}(A) = A$, если $A \leqslant \bar{a}_i$.

Пусть теперь B — произвольное дополнение элемента $\bar{a}_i$. Ввиду (а), $B = Rx_0$, где $x_0 = x_0^{\langle i \rangle} + e_i$. Если $x \in \alpha_{ij}(B) + B$, то

$$x = \alpha_{ij}(\xi x_0) + \eta x_0 = (\xi + \eta) x_0^{\langle i \rangle} - \xi \alpha e_j + (\xi + \eta) e_i.$$

Если, сверх того, $x \in \bar{a}_i$, то $\xi + \eta = 0$, откуда $x = -\xi \alpha e_j$. Таким образом,

$$(\alpha_{ij}(B) + B) \cap \bar{a}_i \leqslant R\alpha e_j.$$

Если $x \in R\alpha e_j$, то

$$x = \xi \alpha e_j = \alpha_{ij}(-\xi x_0) + \xi x_0 \in (\alpha_{ij}(B) + B) \cap \bar{a}_i,$$

т. е. $R\alpha e_j \leqslant [\alpha_{ij}(B) + B] \cap \bar{a}_i$. Следовательно,

$$(\alpha_{ij}(B) + B) \cap \bar{a}_i = R\alpha e_j,$$

т. е. не зависит от выбора B, что и требовалось.

(в) $\alpha_{ij}\beta_{ij} = (\alpha + \beta)_{ij}$.

Если $k \neq i$, то

$$\alpha_{ij}\beta_{ij}(e_k) = \alpha_{ij}(e_k) = e_k = (\alpha + \beta)_{ij}(e_k).$$

Так как

$$\alpha_{ij}\beta_{ij}(e_i) = \alpha_{ij}(e_i - \beta e_j) = e_i - \alpha e_j - \beta e_j = (\alpha + \beta)_{ij}(e_i),$$

то все доказано.

(г) $\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj} = (\alpha\beta)_{ij}$.

Если $l \neq i, k$, то

$$\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}(e_l) = e_l = (\alpha\beta)_{ij}(e_l).$$

Кроме того,

$$\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}(e_i) = \alpha_{ik}\beta_{kj}\alpha_{ik}^{-1}\beta_{kj}^{-1}(e_i) = \alpha_{ik}\beta_{kj}(e_i + \alpha e_k) =$$
$$= \alpha_{ik}(e_i + \alpha e_k - \alpha\beta e_j) = e_i - \alpha e_k + \alpha e_k - \alpha\beta e_j = (\alpha\beta)_{ij}(e_i)$$

и

$$\alpha_{ik} \otimes \beta_{kj}(e_k) = \alpha_{ik}\beta_{kj}\alpha_{ik}^{-1}(e_k + \beta e_j) = \alpha_{ik}(e_k - \beta e_j + \beta e_j) =$$
$$= e_k = (\alpha\beta)_{ij}(e_k).$$

Ясно, что $\Gamma_{ij} = (1)_{ij}$. Поэтому из (б) следует, что Γ_{ij} — нормальный автоморфизм структуры L и что $\omega(\Gamma_{ij}) = Re_j = a_j$. Непосредственный подсчет показывает, что

$$\Gamma_{ij}(a_i) \cap a_i = R(e_i - e_j) \cap Re_i = 0.$$

Из (г) вытекает, что $\Gamma_{ik} \otimes \Gamma_{kj} = \Gamma_{ij}$. Таким образом, Γ_{ij} обладают свойствами P1 — P4, т. е. (a_i, Γ_{ij}) является репером. Ввиду (в) и (г), вспомогательное кольцо, определяемое этим репером, совпадает с R.

Оказывается, что требование существования однородного базиса не является необходимым для справедливости теоремы 10. Назовем систему $a_1, \ldots, a_n, a^*$ элементов структуры L *квазиоднородным базисом ранга* n, если:

$$\text{а) } a_1 \dotplus \ldots \dotplus a_n + a^* = 1; \quad \text{б) } a_i \sim a_j; \quad \text{в) } a^* = \sum_1^m b_i,$$

где $b_i \sim c_i \leqslant a_1$.

Теорема (Jónsson [2]). *Каждая дедекиндова структура с дополнениями, обладающая квазиоднородным базисом ранга $n \geqslant 4$, изоморфна структуре главных левых идеалов некоторого регулярного кольца.*

В этой же работе показано, что условиям теоремы удовлетворяет всякая дедекиндова структура с дополнениями размерности $\geqslant 4$, не содержащая нейтральных идеалов [1]). Там же построен пример такой структуры, не обладающей однородным базисом ранга > 1.

---

[1]) Идеал I структуры L называется *нейтральным*, если из $a \sim b \in I$ вытекает, что $a \in I$ (Биркхоф [1], стр. 180).

§ 5. ПОЛНЫЕ ДЕДЕКИНДОВЫ СТРУКТУРЫ С ДОПОЛНЕНИЯМИ

18. Некоторые свойства дедекиндовых структур с дополнениями.

Предложение 57. *Если* $\varphi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$, *где* φ_i — *перспектива в дедекиндовой структуре с дополнениями, и* $\varphi(a) = c \neq 0$, *то существует такой ненулевой элемент* $a' \leqslant a$, *что* $\varphi(a') \sim a'$.

Доказательство, очевидно, достаточно провести для $n = 2$. Положим $\varphi_2(a) = b$.

1-й случай: $ab \neq 0$. Положив $a' = ab$ и учитывая предложение 11, будем иметь $\varphi(a') = P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a') = P_{(b \to c)}(a') \sim a'$.

2-й случай: $bc \neq 0$. Как и раньше, положив $a' = P^{-1}_{(a \to b)}(bc)$, получим $\varphi(a') = P_{(b \to c)}(bc) = bc \sim a'$.

3-й случай: $bc = 0$, но существует такой элемент $a_1 \leqslant a$, что $u = a_1 [P_{(a \to b)}(a_1) + P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1)] < a_1$.

Пусть $a_1 = u \dotplus a'$. Так как

$$P_{(a \to b)}(a') \, P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a') \leqslant bc = 0,$$

а применяя П31, можно получить

$$[P_{(a \to b)}(a') + P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a')] \, a' \leqslant$$
$$\leqslant [P_{(a \to b)}(a_1) + P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1)] \, a_1 a' = ua' = 0,$$

то, применяя С3, будем иметь

$$[a' + P_{(a \to b)}(a')] \, P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a') = 0.$$

Ввиду предложения 12, отсюда следует, что $a' \sim P_{(b \to c)} \times P_{(a \to b)}(a') = \varphi(a')$.

4-й случай: Существует такой элемент $a_1 \leqslant a$, что

$$v = P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1) \, [a_1 + P_{(a \to b)}(a_1)] < P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1).$$

Пусть a' определяется из равенства

$$P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1) = P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a') \dotplus v.$$

Тогда $a_1 \geqslant a'$. Учитывая П31, получаем

$$[a' + P_{(a \to b)}(a')] \, P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a') \leqslant [a_1 + P_{(a \to b)}(a_1)] \times$$
$$\times P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1) \, P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a') = v P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a') = 0.$$

Применив предложение 12, имеем $a' \sim P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a') = \varphi(a')$.

5-й случай: $ab = bc = 0$, для любого $a_1 \leqslant a$ имеет место

$$a_1 \leqslant P_{(a \to b)}(a_1) + P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1) \text{ и } P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1) \leqslant \leqslant a_1 + P_{(a \to b)}(a_1).$$

В этом случае для всех $a_1 \leqslant a$ имеет место

$$a_1 + P_{(a \to b)}(a_1) \leqslant P_{(a \to b)}(a_1) + P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1) \leqslant \leqslant a_1 + P_{(a \to b)}(a_1),$$

т. е.

$$a_1 + P_{(a \to b)}(a_1) = P_{(a \to b)}(a_1) + P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1).$$

Так как $a_1 P_{(a \to b)}(a_1) \leqslant ab = 0$, $P_{(a \to b)}(a_1) P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1) \leqslant \leqslant bc = 0$, то $a_1 \sim P_{(b \to c)} P_{(a \to b)}(a_1)$ имеет место для всякого $a_1 \leqslant a$.

Предложение 58. *Следующие три свойства элементов a и b дедекиндовой структуры с дополнениями эквивалентны*:

а) $a_1 \leqslant a$, $b_1 \leqslant b$, $a_1 \sim b_1$ *всегда влечет* $a_1 = b_1 = 0$;

б) $ab = 0$ *и для всякого* u, *подчиненного условиям* $u \leqslant a + b$, $au = bu = 0$, *имеет место* $u = 0$;

в) $ab = 0$ и

$$(a + b) x = ax + bx \tag{86}$$

для всякого x.

Доказательство. а) $\to$ б). Положим $a_1 = a(u + b)$ и $b_1 = b(u + a)$. Применяя МЗ и ПЗ1, будем иметь

$$a_1 + u = a(u + b) + u = (u + b)(a + u) = = b(u + a) + u = b_1 + u,$$

$$a_1 u = au = 0 = bu = b_1 u.$$

Следовательно, $a_1 \sim b_1$. Так как $a_1 \leqslant a$ и $b_1 \leqslant b$, то из а) вытекает, что $a(u + b) = a_1 = 0$. Но тогда, применяя ПЗ1 и СЗ, получим

$$u = u(a + b) = ub = 0.$$

Так как $ab \leqslant a$, b и $ab \sim ab$, то из а) следует, что $ab = 0$.

б) $\to$ в). Сначала докажем справедливость (86) при $x \leqslant a + b$. Так как $x \geqslant ax + bx$, то можно записать

$x = (ax + bx) \dot{+} y$. Тогда $y \leqslant x \leqslant a + b$, $ya = yxa \leqslant \leqslant y(ax + bx) = 0$, $yb = yxb \leqslant y(ax + bx) = 0$. Ввиду б), отсюда следует, что $y = 0$, т. е. $ax + bx = x = (a + b)x$, если $x \leqslant a + b$. Учитывая этот результат, для произвольного x будем иметь

$$(a + b)x = [(a + b)x](a + b) =$$
$$= (a + b)xa + (a + b)xb = ax + bx.$$

в) $\to$ а). Ввиду предложения 5, найдется такой элемент x, что $a_1 \dot{+} x = b_1 \dot{+} x = a_1 + b_1$. Применяя ПЗ1 и МЗ, получаем

$$ax = a(a_1 + b_1)x = (a_1 + ab_1)x \leqslant (a_1 + ab)x = a_1 x = 0.$$

Аналогично проверяется, что $bx = 0$. Следовательно,

$$x = (a + b)x = ax + bx = 0.$$

Отсюда $a_1 = b_1 = a_1 b_1 \leqslant ab = 0$.

Элемент z назовем *центральным*, если для z существует только одно дополнение. Это дополнение будем обозначать через $1 - z$.

Предложение 59. *В дедекиндовой структуре L с дополнениями следующие свойства элемента z эквивалентны*:

а) *z — центральный элемент*;

б) *$a = az + az'$ для любого $a \in L$ и некоторого дополнения z' элемента z*;

в) *$(a + b)z = az + bz$ для любых a, $b \in L$*;

г) *$(a + z)b = ab + zb$ для любых a, $b \in L$*;

д) *если $x \sim z$, то $x = z$*.

Доказательство. а) $\to$ б). Если $za \dot{+} y = a$, то в силу ПЗ1 $zy = zay = 0$ и для подходящего $u \in L$ можно записать

$$z \dot{+} y \dot{+} u = 1.$$

Ввиду а), $y \leqslant y + u = 1 - z$. Следовательно,

$$a = za + ya \leqslant za + (1 - z)a \leqslant a,$$

откуда $a = za + (1 - z)a$.

б) $\to$ в). Ясно, что $(z'a + z'b)z \leqslant z'z = 0$. Поэтому, применяя б) и МЗ, получим

$$(a + b)z = (za + z'a + zb + z'b)z = za + zb.$$

в) $\to$ г). Применяя ПЗ1, ПЗ2 и МЗ, будем иметь

$$(a+z)b=(a+z)(a+b)b=(a+za+zb)b=$$
$$=(a+zb)b=ab+zb.$$

г) $\to$ а). Пусть z' и z'' — дополнения элемента z. Ввиду г),

$$z'=z'(z''+z)=z'z''\leqslant z''$$

и НЗ приводит к $z'=z''$.

г) $\to$ д). Если $x\sim z$, то, согласно предложению 5, найдется такой элемент c, что

$$x\dot{+}c=z\dot{+}c=x+z.$$

Умножая это равенство на c и применяя г), получим

$$c=(x+z)c=xc+zc=0,$$

т. е. $x=z$.

д) $\to$ б). Пусть z' — произвольное дополнение элемента z, а y — произвольное дополнение элемента z'. Тогда $y\dot{+}z'=$ $=1=z\dot{+}z'$, т. е. $z\sim y$. Ввиду д), $z=y$. Следовательно, z' — центральный элемент. Применяя г), будем иметь

$$a=a(z+z')=az+az'.$$

Предложение 60. *Если z — центральный элемент дедекиндовой структуры с дополнениями, то $1-z$ также централен и из $az=0$ следует, что $a\leqslant 1-z$.*

Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что $1-z$ удовлетворяет условию б) предложения 59. Если $az=0$, то из свойства г) предложения 59 вытекает

$$a=a[z+(1-z)]=az+a(1-z)=a(1-z)\leqslant 1-z.$$

Будем писать $a\precsim b$, если существует такой элемент $b_1<b$, что $a\sim b_1$.

Предложение 61. *В дедекиндовой структуре с дополнениями $a\precsim b$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такое $a_1>a$, что $a_1\sim b$.*

Доказательство. Если $b\sim a_1>a$, то $a\sim b_1=$ $=P_{a_1\to b}(a)<b$. Если же мы имеем $a\precsim b$, то $a\sim b_1<b$. Согласно предложению 5, найдется такой элемент x, что $a\dot{+}x=b_1\dot{+}x=a+b$. Пусть $a_1=a+bx$. Тогда ПЗ2 дает $a_1+x=a+x=a+x+b=b_1+x+b=b+x$, а МЗ—$a_1x=(a+bx)x=bx$. Ввиду предложения 6, отсюда

следует, что $b \sim a_1 \geqslant a$. Если $a_1 = a$, то $bx \leqslant a$. Умножая обе части этого неравенства на x, получим $bx \leqslant ax = 0$. Но тогда, учитывая, что $b \leqslant b_1 + x$, будем иметь $b \dot{+} x = b_1 \dot{+} x$. Ввиду Н3, отсюда следует, что $b = b_1$. Противоречие.

Предложение 62. *Для любого центрального элемента z дедекиндовой структуры L с дополнениями справедливы следующие свойства*:

а) *если $a \sim b$, то $za \sim zb$*;

б) *если $a \precsim b$, то $za \precsim zb$*;

в) *если $a \precsim z$, то $a \leqslant z$*.

Доказательство. Если $a \sim b$, то $a \dot{+} c = b \dot{+} c$. Применение предложения 59, в) дает $za \dot{+} zc = zb \dot{+} zc$. Следовательно, $za \sim zb$, т. е. справедливость а) доказана. Справедливость б) сразу следует из а). Если $a \precsim z$, то, согласно предложению 61, $a \leqslant u \sim z$. Но, ввиду предложения 59, д), $u = z$, т. е. $a \leqslant z$.

19. Центр полной дедекиндовой структуры с дополнениями. Структура называется *полной*, если любое непустое множество $\{a_\alpha\}$ ее элементов имеет точную верхнюю грань (или сумму) $\sum a_\alpha$. Оказывается, что всякое непустое множество $\{a_\alpha\}$ элементов полной структуры обладает также и точной нижней гранью (или пересечением) $\prod a_\alpha$ (Биркгоф, [1], стр. 82, теорема 2). Элемент a назовем *D-элементом*, если структура L_a дистрибутивна.

Предложение 63. *Пусть V_a — множество всех таких элементов v полной дедекиндовой структуры L с дополнениями, что $av = 0$ и $(a + v)x = ax + vx$ для всякого $x \in L$. Тогда*:

а) *если $v \in V_a$, то $(v + x)a = xa$ и $(x + a)v = xv$ для всякого $x \in L$*;

б) *если $a' \leqslant a$, $v \in V_a$ и $v' \leqslant v$, то $v' \in V_{a'}$*;

в) *если $v \in V_a$, а $w \sim v$, то $w \in V_a$*;

г) *если $v_\alpha \in V_a$, то $a \sum v_\alpha = 0$*;

д) *если $v_\alpha \in V_a$, то $\sum v_\alpha \in V_a$*;

е) *если $v \in V_a$, то a и v — центральные элементы структуры L_{a+v}*;

ж) *если L_b не содержит ненулевых D-элементов, то для любого D-элемента d имеет место $d \in V_b$*.

Доказательство. Из П31, П32 и М3 вытекает

$$(v + x)a = (v + x)(a + v)a = [v + (a + v)x]a = \\ = (v + ax)a = ax + av = ax$$

и

$$(x+a)v=(x+a)(x+v)v=[x+a(x\dot{+}v)]v=$$
$$=(x+ax)v=xv.$$

Если при выполнении условий свойства б) имеет место $v'\notin V_{a'}$, то, согласно предложению 58, найдутся такие элементы a_1' и v_1', что $a_1'\sim v_1'$, $0<a_1'\leqslant a'\leqslant a$, $0<v_1'\leqslant v'\leqslant v$. Вторичное применение предложения 58 приводит к $v\notin V_a$. Противоречие. Для доказательства свойства в) заметим, что, ввиду предложения 58, из $w\notin V_a$ вытекает существование таких элементов a_1 и w_1, что $a_1\sim w_1$, $0<a_1\leqslant a$, $0<w_1\leqslant w$. Так как из предложения 8 вытекает, что $w_1\sim v_1=$ $=P_{(w\to v)}(w_1)$, то предложение 57 обеспечивает существование ненулевых элементов a_2 и v_2, удовлетворяющих соотношениям $a_2\sim v_2$, $a_2\leqslant a_1\leqslant a$, $v_2\leqslant v_1\leqslant v$. Теперь, применив предложение 58, приходим к противоречащему условию соотношению $v\notin V_a$. Для доказательства свойства г) примем во внимание, что, ввиду а), из $a\dot{+}b=1$ вытекает

$$v_\alpha=(a+b)v_\alpha=bv_\alpha.$$

Следовательно, $v_\alpha\leqslant b$. Отсюда $\sum v_\alpha\leqslant b$, а значит, $a\sum v_\alpha\leqslant ab=0$. Далее допустим, что при выполнении условий свойства д) имеет место $\sum v_\alpha=v\notin V_a$. Согласно предложению 58, найдутся ненулевые перспективные элементы $a'\leqslant a$ и $v'\leqslant v$. Ввиду б), $v_\alpha\in V_{a'}$. Но тогда непосредственно из определения следует, что $a'\in V_{v_\alpha}$. Отсюда, ввиду в), получаем, что $v'\in V_{v_\alpha}$. Значит, $v_\alpha\in V_{v'}$. Теперь, применяя ПЗ1 и г), будем иметь $v'=vv'=0$, что противоречит выбору v'. Перейдем к доказательству свойства е). Пусть x и y — два дополнения элемента a в $a+v$. Тогда

$$a\dot{+}x=a\dot{+}y=a\dot{+}v.$$

Умножая эти равенства на v и учитывая а), будем иметь $xv=yv=v$, т. е. $v\leqslant x, y$. Но тогда применение НЗ дает $x=v=y$. Этим доказана центральность элемента a в L_{a+v}. Так как из $v\in V_a$ вытекает $a\in V_v$, то свойство е) доказано полностью. Наконец, предположим, что при выполнении условий свойства ж) имеет место $d\notin V_b$. Согласно предложению 58, в L_b найдется элемент $b'\neq 0$, перспективный элементу $d' \in L_d$. Так как из предложения 7 вытекает изоморфизм структур $L_{d'}$ и $L_{b'}$, то b' — D-элемент. Противоречие со свойством L_b завершает доказательство.

Предложение 64. *Множество Z центральных элементов*[1]) *полной дедекиндовой структуры L с дополнениями является полной дистрибутивной структурой с дополнениями. Точные грани* (как верхняя, так и нижняя) *любого множества элементов из Z в структурах L и Z совпадают. Если $z_\alpha \in Z$, то $a \sum z_\alpha = \sum a z_\alpha$ для всякого $a \in L$.*

Доказательство. Если $z \in Z$, то из предложения 60 вытекает, что $1 - z \in Z$. Пусть, далее, $c = \sum a z_\alpha$, $z = \sum z_\alpha$ и $a = c \dotplus d$. Ввиду ПЗ1, $d z_\alpha = d a z_\alpha \leqslant dc = 0$. Поэтому, учитывая предложение 59, будем иметь $z_\alpha \in V_d$. После этого из предложения 63, д) вытекает, что $z \in V_d$. Отсюда, принимая во внимание предложение 63, а), соотношение $c \leqslant z$ и М3, получаем

$$(a+b)\,z = (c+d+b)\,z = (c+b)\,z + dz = c + bz + dz = \\ = (c+d)\,z + bz = az + bz.$$

Ввиду произвольности a и b, этим доказано, что $z \in Z$. Из тех же соображений следует, что

$$c \leqslant az = (c+d)\,z = c + dz = c,$$

т. е. $a \sum z_\alpha = \sum a z_\alpha$. Пусть, наконец, $z = \prod z_\alpha$, $z'_\alpha = 1 - z_\alpha$, $z' = \sum z'_\alpha$. Тогда z'_α, $z \in Z$ и $zz' = \sum zz'_\alpha \leqslant \sum z_\alpha z'_\alpha = 0$. Ввиду предложения 60, $z \leqslant 1 - z'$. С другой стороны, $(1 - z')\,z'_\alpha \leqslant \leqslant (1 - z')\,z' = 0$. Отсюда $1 - z' \leqslant 1 - z'_\alpha = z_\alpha$. Следовательно, $1 - z' \leqslant \prod z_\alpha = z$. Таким образом, $z = 1 - z' \in Z$.

Условимся обозначать через $e(a)$ пересечение всех центральных элементов, превосходящих a. Ввиду предложения 64, $e(a)$ — центральный элемент. Если D-элемент a таков, что $e(a) = 1$, то он называется *правильным*.

Предложение 65. *Если L — полная дедекиндова структура с дополнениями, то*:

а) *если $a \sim b$, то $e(a) = e(b)$*;

б) *если $a \precsim b$, то $e(a) \leqslant e(b)$*;

в) *если z — центральный элемент, то $e(za) = z e(a)$*;

г) $e\left(\sum a_\alpha\right) = \sum e(a_\alpha)$.

---

[1]) Это множество обычно называют *центром* структуры L.

Доказательство. Если $a \sim b$, то, очевидно, $a \precsim e(b)$. Из предложения 62, в) вытекает, что $a \leqslant e(b)$, а значит, $e(a) \leqslant e(b)$. Ввиду равноправия a и b, приходим к $e(a) = e(b)$. Свойство а) доказано. Для доказательства свойства б) достаточно заметить, что $a \prec b$ влечет $a \sim b_1 < b$, откуда после применения а) получаем $e(a) = e(b_1) \leqslant e(b)$. Для доказательства свойства в) заметим, что из предложения 59 вытекает

$$e(za) + (1 - z) \geqslant za + (1 - z)a = a.$$

Так как, согласно предложению 64, $e(za) + (1 - z)$ — центральный элемент, то $e(za) + (1 - z) \geqslant e(a)$. Отсюда, учитывая предложение 59, выводим

$$ze(a) \leqslant z[e(za) + (1 - z)] = ze(za) \leqslant e(za).$$

С другой стороны, из неравенства $za \leqslant ze(a)$ и центральности элемента $ze(a)$ вытекает $e(za) \leqslant ze(a)$. Следовательно,

$$e(za) = ze(a),$$

т. е. свойство в) доказано. Так как $e(a_\alpha) \leqslant e(\sum a_\alpha)$, то $\sum e(a_\alpha) \leqslant e(\sum a_\alpha)$. С другой стороны, предложение 64 обеспечивает центральность элемента $\sum e(a_\alpha)$. Поэтому из очевидного неравенства $\sum a_\alpha \leqslant \sum e(a_\alpha)$ вытекает $e(\sum a_\alpha) \leqslant \leqslant \sum e(a_\alpha)$. Все доказано.

Предложение 66. *Если элементы a и b полной дедекиндовой структуры L с дополнениями таковы, что $e(a)e(b) \neq 0$, то найдутся такие элементы $a_1 \leqslant a$ и $b_1 \leqslant b$, что $a_1 \sim b_1 \neq 0$.*

Доказательство. Пусть V_b имеет тот же смысл, что и в предложении 63. Из предложения 63, д) следует, что $z = \sum\limits_{v \in V_b} v \in V_b$. Если $c \sim z$, то, согласно предложению 63, в), $c \in V_b$ и, следовательно, $c \leqslant z$. Применение НЗ дает $c = z$. Ввиду предложения 59, этим доказано, что z — центральный элемент.

Если утверждение нашего предложения неверно, то a и b удовлетворяют условию а) предложения 58. Поэтому $a \in V_b$, а значит, $a \leqslant z$. Следовательно, $e(a) \leqslant z$. Так как $z \in V_b$ и z — центральный элемент, то применение предложения 65, в) дает

$$e(a)e(b) \leqslant ze(b) = e(zb) = 0.$$

Полученное противоречие с условием завершает доказательство.

Предложение 67. *Элемент c полной дедекиндовой структуры L с дополнениями является центральным элементом структуры L_a тогда и только тогда, когда $c = ae(c)$.*

Первая часть предложения является следствием следующего утверждения:

Если z — центральный элемент структуры L, то $c = az$ — центральный элемент структуры L_a.

Действительно, пусть $c \dot{+} d_1 = c \dot{+} d_2 = a$. После умножения на z и применения МЗ, получим

$$c \dot{+} d_1 z = c \dot{+} d_2 z = c.$$

Отсюда $d_1 z = d_2 z = 0$. Если $c \dot{+} d = z$, то

$$d_1 + z = d_1 + c + d = d_2 + c + d = d_2 + z.$$

Следовательно, d_1 и d_2 являются дополнениями элемента z в L_{d_2+z}. Так как z централен в L_{d_2+z}, то $d_1 = d_2$. Значит, c имеет в L_a единственное дополнение и, следовательно, централен в L_a.

Для доказательства второй части допустим, что $c \dot{+} d = a$ и $e(c)e(d) \neq 0$. Ввиду предложения 66, найдутся такие элементы c_1 и d_1, что $0 < c_1 \leqslant c$, $0 < d_1 \leqslant d$ и $c_1 \sim d_1$. Из предложения 5 вытекает, что для подходящего x имеем $c_1 \dot{+} x = d_1 \dot{+} x = a$. Так как c — центральный элемент структуры L_a, то, умножая это равенство на c и учитывая предложение 59, будем иметь $c_1 \dot{+} cx = cx$, откуда $c_1 = c_1 cx = 0$. Полученное противоречие показывает, что $e(c)e(d) = 0$. Поэтому предложение 65, г) приводит к $e(a) = e(c) \dot{+} e(d)$. Умножая это равенство на a, будем иметь

$$c \dot{+} d = a = ae(c) \dot{+} (c + d)\,e(d) = ae(c) \dot{+} d.$$

Отсюда после умножения на $e(c)$ приходим к $c = ae(c)$.

Предложение 68. *В полной дедекиндовой структуре L с дополнениями справедливы следующие свойства:*

а) *если множество D-элементов $\{a_\alpha\}$ таково, что из $\alpha \neq \beta$ вытекает $e(a_\alpha)e(a_\beta) = 0$, то $a = \sum a_\alpha$ также является D-элементом;*

б) *любые два правильных элемента перспективны.*

Доказательство. а) Пусть $x \in L_a$ и

$$x \dot{+} u = x \dot{+} v = a.$$

Применяя МЗ и предложение 64, можно получить

$$a_\alpha \leqslant ae(a_\alpha) \leqslant \Big(a_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} e(a_\beta)\Big) e(a_\alpha) = a_\alpha,$$

т. е. $ae(a_\alpha) = a_\alpha$. Поэтому, учитывая предложение 59, будем иметь

$$a_\alpha = ae(a_\alpha) = xe(a_\alpha) \dotplus ue(a_\alpha) = xe(a_\alpha) \dotplus ve(a_\alpha).$$

Поскольку $xe(a_\alpha)$, $ue(a_\alpha)$, $ve(a_\alpha) \in L_{a_\alpha}$, а L_{a_α} дистрибутивна, то предложение 59 дает $ue(a_\alpha) = ve(a_\alpha)$. Кроме того, предложение 65, г) показывает, что $a \leqslant e(a) = \sum e(a_\alpha)$. Поэтому из ПЗ1 и предложения 64 вытекает

$$u = u \sum e(a_\alpha) = v \sum e(a_\alpha) = v.$$

Таким образом, произвольный элемент x из L_a имеет в L_a единственное дополнение. Поэтому предложение 59 обеспечивает дистрибутивность структуры L_a, что и требовалось.

б) Пусть a и b — правильные элементы. Если $a = 0$, то $0 = 1$, т. е. L состоит из одного нуля, и наше утверждение, очевидно, справедливо, так что будем считать, что a, $b \neq 0$. Допустим, что $a \in V_b$. Тогда из предложения 63, е) следует, что a и b центральны в L_{a+b}. Так как $e(a) = 1$, то предложение 67 приводит к

$$a = (a + b)\, e(a) = a + b.$$

Но тогда $a \geqslant b$, откуда $b = ab = 0$.

Таким образом, $a \notin V_b$. Поэтому предложение 58 обеспечивает существование таких элементов a_1 и b_1, что $0 < a_1 \leqslant a$, $0 < b_1 \leqslant b$, $a_1 \sim b_1$. Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ построены такие ненулевые элементы a_β и b_β, что $a_\beta \leqslant a$, $b_\beta \leqslant a$, $a_\beta \sim b_\beta$ и $e(a_{\beta'})\, e(a_{\beta''}) = 0$, если $\beta' \neq \beta''$. Если $\sum_{\beta < \alpha} e(a_\beta) \neq 1$, то предложение 64 позволяет положить $z = 1 - \sum_{\beta < \alpha} e(a_\beta)$. Ясно, что $z \neq 0$. Из предложений 60 и 65, в) следует, что $e(za) = ze(a) = z$ и $e(zb) = ze(b) = z$. Следовательно, za и zb — правильные элементы структуры L_z.

Рассуждая, как выше, найдем такие a_α и b_α, что $0 < a_\alpha \leqslant az \leqslant z$, $0 < b_\alpha \leqslant bz \leqslant z$, $a_\alpha \sim b_\alpha$. Так как z — центральный элемент, то $e(a_\alpha) \leqslant z$. Поэтому для всех $\beta < \alpha$ имеем $e(a_\alpha)\, e(a_\beta) \leqslant z \sum_{\beta < \alpha} e(a_\beta) = 0$. Для некоторого трансфинита Ω будем иметь $\sum_{\alpha<\Omega} e(a_\alpha)=1$. Поэтому предложения 64 и 67 приводят к

$$a=a\sum_{\alpha<\Omega} e(a_\alpha)=\sum_{\alpha<\Omega} ae(a_\alpha)=\sum_{\alpha<\Omega} a_\alpha\text{ [1]}.$$

Поскольку предложение 65, а) дает $e(a_\alpha)=e(b_\alpha)$, то из тех же самых соображений следует, что $b=\sum_{\alpha<\Omega} b_\alpha$. Так как $a_\alpha\sim b_\alpha$, то предложение 5 позволяет найти такие элементы x_α, что

$$a_\alpha\dot{+}x_\alpha=b_\alpha\dot{+}x_\alpha=a_\alpha+b_\alpha. \tag{87}$$

Положив $x=\sum_{\alpha<\Omega} x_\alpha$, будем иметь $a\dot{+}x=b\dot{+}x$.

Пусть $c=ax$. Из (87) и предложения 65, г) вытекает

$$e(x_\alpha)\leqslant e(a_\alpha)+e(b_\alpha)=e(a_\alpha).$$

Поэтому, применяя предложения 59, в), 64 и 59, г), будем иметь

$$\begin{aligned}c=\Big[a_\alpha+\sum_{\beta\neq\alpha} a_\beta\Big]\Big(x_\alpha+\sum_{\beta\neq\alpha} x_\beta\Big)&\leqslant\\ \leqslant\Big[a_\alpha+\sum_{\beta\neq\alpha} e(a_\beta)\Big]&\times\Big[x_\alpha+\sum_{\beta\neq\alpha} e(a_\beta)\Big]=\\ =a_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha} e(a_\beta)+x_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha} e(a_\beta)&+\sum_{\beta\neq\alpha} e(a_\beta)\leqslant\sum_{\beta\neq\alpha} e(a_\beta).\end{aligned}$$

Отсюда после вторичного применения предложения 64 получаем

$$ax=c=c\sum_{\alpha<\Omega} e(a_\alpha)=\sum_{\alpha<\Omega} ce(a_\alpha)\leqslant\sum_{\alpha<\Omega} e(a_\alpha)\sum_{\beta\neq\alpha} e(a_\beta)=0.$$

Аналогично проверяется, что $bx=0$. Следовательно, $a\dot{+}x=b\dot{+}x$, т. е. $a\sim b$.

20. Строение полной дедекиндовой структуры с дополнениями. Полную дедекиндову структуру с дополнениями назовем *полудистрибутивной*, если она содержит правильный элемент. Полную дедекиндову структуру с дополнениями назовем *антидистрибутивной*, если она не содержит ненулевых D-элементов [2]. Скажем, что полная дедекиндова

[1] Так как a — D-элемент и $a_\alpha\leqslant a$, то a_α централен в L_a.

[2] Капланский (Kaplansky [3]) назвал эти структуры структурами типа I и типа II соответственно.

структура L с дополнениями разложена в *прямое произведение* структур L_{z_α}, если z_α — центральные элементы, $1=\sum z_\alpha$, $z_\alpha z_\beta=0$ при $\alpha\neq\beta$. Ввиду предложения 64, для всякого $a\in L$ имеем $a=\sum az_\alpha$. Пусть $a=\sum b_\alpha$, где $b_\alpha\leqslant z_\alpha$. В силу предложения 64, $z_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}b_\beta\leqslant z_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}z_\beta=0$. Поэтому, применяя МЗ, получим $az_\alpha=\left(b_\alpha+\sum_{\beta\neq\alpha}b_\beta\right)z_\alpha=b_\alpha$ (ср. Биркгоф [1], стр. 8).

Теорема 11. *Полная дедекиндова структура L с дополнениями разлагается в прямое произведение полудистрибутивных и антидистрибутивных структур*[1]).

Доказательство. Если L не антидистрибутивна, то в ней найдется ненулевой D-элемент a. Ясно, что $L_{e(a)}$ полудистрибутивна и $1=e(a)+[1-e(a)]$. Если $L_{1-e(a)}$ не антидистрибутивна, то от $1-e(a)$ можно в свою очередь отщепить такой элемент $e(b)$, что b — D-элемент. Так как предложение 64 позволяет продолжать этот процесс по трансфинитам, то все доказано.

Теперь мы установим некоторые условия, достаточные для того, чтобы полудистрибутивная или антидистрибутивная структура обладала однородным базисом. Ввиду теорем 9 и 10, этим будут выделены классы полных дедекиндовых структур с дополнениями, изучение которых сводится к изучению регулярных колец.

Полную дедекиндову структуру L с дополнениями назовем *$\perp$-структурой*, если для ее элементов определено бинарное отношение $a\perp b$, обладающее следующими свойствами:

$\perp$ 1. Если $a\perp b$, то $b\perp a$.

$\perp$ 2. Если $a\perp b$ и $a_1\leqslant a$, то $a_1\perp b$.

$\perp$ 3. Если $a\perp b$ и $(a+b)\perp c$, то $a\perp(b+c)$.

Всякую полную дедекиндову структуру можно превратить в $\perp$-структуру, полагая, что $a\perp b$ равносильно $ab=0$. Действительно, справедливость свойств $\perp$ 1 и $\perp$ 2 очевидна. Свойство же $\perp$ 3 является следствием предложения 2. Это отношение $\perp$ будем называть *естественным*.

Множество $\{a_\alpha, \alpha\in I\}$ элементов $\perp$-структуры будем называть *$\perp$-независимым* (в случае естественного отно-

---

[1]) Kaplansky [3]. Далеко идущее обобщение этого результата доказал Маеда (Maeda [9]).

шения $\perp$ — просто *независимым*), если при любом разбиении множества I на непересекающиеся множества I_1 и I_2 имеет место $\sum\limits_{\alpha \in I_1} a_\alpha \perp \sum\limits_{\alpha \in I_2} a_\alpha$. Ввиду предложения 3, конечные множества, независимые в смысле § 1, оказываются независимыми и в смысле только что введенного определения.

Предложение 69. *Если* $\{a_\alpha,\ \alpha \in I\}$ — $\perp$-*независимое множество* $\perp$-*структуры* L *и* $a_0 \perp \sum\limits_{\alpha \in I} a_\alpha$, *то множество* $\{a_\alpha,\ \alpha \in I \cup 0\}$ *также* $\perp$-*независимо.*

Доказательство. Пусть $I \cup 0 = I_1 \cup I_2$ — разбиение множества $I \cup 0$ на непересекающиеся подмножества и $0 \in I_1$. Ясно, что $\sum\limits_{\alpha \in I_2} a_\alpha \perp \sum\limits_{\alpha \in I_1 \setminus 0} a_\alpha$ и $\left(\sum\limits_{\alpha \in I_2} a_\alpha + \sum\limits_{\alpha \in I_1 \setminus 0} a_\alpha\right) \perp a_0$. Отсюда, ввиду $\perp 3$, вытекает $\sum\limits_{\alpha \in I_2} a_\alpha \perp \left(\sum\limits_{\alpha \in I_1 \setminus 0} + a_0\right) = \sum\limits_{\alpha \in I_1} a_\alpha$, что и требовалось.

В дальнейшем мы будем подчинять рассматриваемые $\perp$-структуры некоторым из следующих свойств:

А. Для всякого a найдется такой элемент b, что $a \perp b$ и $a + b = 1$.

Б. Если каждое из множеств M_α возрастающей (вообще говоря, трансфинитной) последовательности $\perp$-независимо, то множество $M = \bigcup M_\alpha$ также $\perp$-независимо.

В. Если $\{a_\alpha + b_\alpha,\ \alpha \in I\}$ — $\perp$-независимое множество и $a_\alpha b_\alpha = 0$ для всех α, то $\left(\sum\limits_{\alpha \in I} a_\alpha\right)\left(\sum\limits_{\alpha \in I} b_\alpha\right) = 0$.

Г. Для всякого ненулевого элемента a в L_a найдутся такие ненулевые элементы x и y, что $x \sim y$ и $xy = 0$.

Д. Не существует бесконечного $\perp$-независимого множества попарно перспективных ненулевых элементов.

Предложение 70. *Пусть* $\perp$-*структура* L *обладает свойством* В. *Если* $a_\alpha,\ b_\alpha \in L,\ a_\alpha \sim b_\alpha$, *а множество* $\{a_\alpha + b_\alpha\}$ $\perp$-*независимо, то* $\sum a_\alpha \sim \sum b_\alpha$.

Доказательство. Ввиду предложения 5, найдутся такие x_α, что

$$a_\alpha \dot{+} x_\alpha = b_\alpha \dot{+} x_\alpha = a_\alpha + b_\alpha.$$

Если $\sum a_\alpha = a,\ \sum b_\alpha = b,\ \sum x_\alpha = x$, то из условия В вытекает, что $ax = bx = 0$. Так как равенство $a + x = b + x$ очевидно, то все доказано.

Теорема 12. *Если в $\perp$-структуре L имеют место свойства* А, Б, В, Г, *то L обладает однородным базисом ранга 2^m для всякого m*[1]).

Лемма. *В L существуют такие элементы a и b, что $a \dot{+} b = 1$ и $a \sim b$.*

Доказательство. Ввиду условия Г, в L найдутся такие ненулевые элементы a_1 и b_1, что $a_1 \sim b_1$ и $a_1 b_1 = 0$. Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ построены такие ненулевые элементы a_β и b_β, что $a_\beta \sim b_\beta$, $a_\beta b_\beta = 0$, а множество $\{a_\gamma + b_\gamma,\ \gamma \leqslant \beta\}$ $\perp$-независимо.

Ввиду А, найдется такой элемент $c \in L$, что $c \perp \sum\limits_{\beta < \alpha} (a_\beta + b_\beta)$ и $c + \sum\limits_{\beta < \alpha} (a_\beta + b_\beta) = 1$. Если $c \neq 0$, то, согласно Г, в L_c найдутся такие ненулевые элементы a_α и b_α, что $a_\alpha \sim b_\alpha$ и $a_\alpha b_\alpha = 0$. Ввиду $\perp 2$, $(a_\alpha + b_\alpha) \perp \sum\limits_{\beta < \alpha} (a_\beta + b_\beta)$. Так как из Б вытекает $\perp$-независимость множества $\{a_\beta + b_\beta,\ \beta < \alpha\}$, то предложение 69 обеспечивает $\perp$-независимость множества $\{a_\beta + b_\beta,\ \beta \leqslant \alpha\}$. Для некоторого трансфинита Ω будем иметь $\sum\limits_{\alpha < \Omega} (a_\alpha + b_\alpha) = 1$. Из предложения 70 вытекает, что $a = \sum a_\alpha \sim \sum b_\alpha = b$, а свойство В обеспечивает справедливость равенства $ab = 0$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Ее справедливость для $m = 1$ сразу следует из леммы. Допустим, что $n = 2^{m-1}$ и множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$ является однородным базисом ранга n. Согласно лемме, в L_{a_1} найдутся элементы b_1 и b_1' такие, что $b_1 \sim b_1'$ и $b_1 \dot{+} b_1' = a_1$[2]). Для $i = 1, 2, \ldots, n$ положим

$$b_i = P_{a_1 \to a_i}(b_1),$$
$$b_i' = P_{a_1 \to a_i}(b_1').$$

Согласно предложению 8, $b_1 \sim b_i$, а $b_1' \sim b_i'$, если $1 \leqslant i \leqslant n$. Ввиду предложения 12, для $i \neq 1$ из соотношений $b_1 \sim b_1'$, $b_1' \sim b_i'$ и $(b_1 + b_1') b_i' \leqslant a_1 a_i = 0$ следует, что $b_1 \sim b_i'$. Если

---

[1]) Ср. Maeda [7], стр. 95, теорема 3.3; Kaplansky [3], теорема 6.

[2]) Ясно, что L_{a_1} является $\perp$-структурой, подчиненной условиям Б, В и Г. Если $x \leqslant a_1$, $x + y = 1$ и $x \perp y$, то $x + a_1 y = (x + y) a_1 = a_1$, а из $\perp 2$ вытекает $a_1 y \perp x$. Значит, в L_{a_1} выполнено и условие А.

$j \neq 1, i$, то по тем же соображениям из соотношений

$$b_i \sim b_1,\quad b_1 \sim b_j,\quad (b_i + b_1) b_j \leqslant (a_1 + a_i) a_j = 0,$$
$$b_i \sim b_1,\quad b_1 \sim b'_j,\quad (b_i + b_1) b'_j \leqslant (a_1 + a_i) a_j = 0,$$
$$b'_i \sim b_1,\quad b_1 \sim b'_j,\quad (b'_i + b_1) b'_j \leqslant (a_1 + a_i) a_j = 0$$

(последние равенства вытекают из предложения 3) следует, что $b_i \sim b_j$, $b_i \sim b'_j$, $b'_i \sim b'_j$. Наконец, из $b_1 \sim b'_1$ и предложения 7 вытекает, что $b_i \sim b'_i$ для всех i. Таким образом, элементы $b_1, \ldots, b_n, b'_1, \ldots, b'_n$ попарно перспективны. Так как предложение 4 обеспечивает независимость системы $\{b_1, \ldots, b_n, b'_1, \ldots, b'_n\}$, а равенство $b_1 + b'_1 = a_1$ и предложение 7 приводит к

$$\sum_1^n b_i + \sum_1^n b'_i = \sum_1^n (b_i + b'_i) = \sum_1^n a_i = 1,$$

то теорема 12 полностью доказана.

Теорема 13. *Если в антидистрибутивной* $\perp$*-структуре* L *имеют место свойства* А, Б *и* В, *то* L *обладает однородным базисом ранга* 2^m *для всякого* m [1])

Для доказательства, ввиду теоремы 12, достаточно установить, что L обладает свойством Г. Если $a \in L$, то, ввиду антидистрибутивности, в L_a найдется нецентральный элемент b. Пусть $a = b \dot{+} c$. Из предложения 63, е) следует, что $b \notin V_c$. Но тогда предложение 58 обеспечивает существование таких элементов b_1, c_1, что $0 < b_1 \leqslant b$, $0 < c_1 \leqslant c$, $b_1 \sim c_1$, $b_1 c_1 \leqslant bc = 0$, а это и требовалось.

Предложение 71. *В полудистрибутивной структуре* L *справедливы следующие свойства*: а) *единица представима в виде суммы* (*вообще говоря, бесконечной*) D*-элементов*; б) *для всякого* $a \in L$ *найдется такой* D*-элемент* $b \leqslant a$, *что* $e(b) = e(a)$.

Доказательство. а) Обозначим через a сумму всех D-элементов структуры L, а через b — дополнение элемента a. Если c — D-элемент из L_b, то $c \leqslant ab = 0$. Поэтому из предложения 63, ж) следует, что $d \in V_b$ для всякого D-элемента d структуры L. Но тогда предложение 63, д) обеспечивает справедливость соотношения $a \in V_b$. Отсюда, ввиду предложения 63, е), получаем, что a — центральный элемент

[1]) См. сноску [1]) на стр. 98.

структуры $L_{a+b}=L$. Так как правильный элемент h структуры L лежит в L_a, то $1 \geqslant a = e(a) \geqslant e(h) = 1$, т. е. $a = 1$.

б) Ясно, что можно считать a ненулевым элементом. Если L_a не содержит ненулевых D-элементов, то из предложения 63, ж) следует, что V_a содержит все D-элементы структуры L. Учитывая а) и предложение 63, д), будем иметь, что $1 \in V_a$, т. е. $a = a \cdot 1 = 0$. Полученное противоречие показывает, что в L_a содержится ненулевой D-элемент b_1. Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ построены такие ненулевые D-элементы b_β, что $b_\beta \leqslant a$, а $\beta' \neq \beta''$ влечет $e(b_{\beta'})\, e(b_{\beta''}) = 0$. Если $\sum\limits_{\beta<\alpha} e(b_\beta) < e(a)$, то $z = \left[1 - \sum\limits_{\beta<\alpha} e(b_\beta)\right] \cdot e(a) \neq 0$. Как показано в начале доказательства, в L_z найдется ненулевой D-элемент d. Ясно, что $b_\alpha = ad$ также является D-элементом, причем $b_\alpha \leqslant a$. Так как из предложения 64 следует, что z — центральный элемент, то $e(b_\alpha) \leqslant e(d) \leqslant z$. Поэтому для всех $\beta < \alpha$ имеем $e(b_\alpha)\, e(b_\beta) \leqslant z \sum\limits_{\beta<\alpha} e(b_\beta) \leqslant$ $\leqslant \left[1 - \sum\limits_{\beta<\alpha} e(b_\beta)\right] \sum\limits_{\beta<\alpha} e(b_\beta) = 0$. Очевидно, найдется такой трансфинит Ω, что $\sum\limits_{\alpha<\Omega} e(b_\alpha) = e(a)$. Из предложения 68, а) вытекает, что $b = \sum\limits_{\alpha<\Omega} b_\alpha$ — D-элемент. Остается заметить, что, ввиду предложения 65, г), будем иметь $e(b) = \sum\limits_{\alpha<\Omega} e(b_\alpha) = e(a)$.

Назовем $\perp$-структуру L *$\perp$-однородной структурой* ранга n, если в ней существует такая $\perp$-независимая система правильных элементов $a_1, \ldots, a_n$, что $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Если отношение $\perp$ естественное, то L называется *однородной структурой* ранга n.

Теорема 14. *Полудистрибутивная $\perp$-структура L, обладающая свойствами* А *и* Д, *разлагается в прямое произведение $\perp$-однородных структур* [1]).

Доказательство. Пусть a — правильный элемент структуры L. Положим $a_1 = a$ и допустим, что построена $\perp$-независимая система правильных элементов $a_1, \ldots, a_{k-1}$. Ввиду А, найдется такой элемент d_{k-1}, что $d_{k-1} + \sum\limits_1^{k-1} a_i = 1$ и $d_{k-1} \perp \sum\limits_1^{k-1} a_i$. Если $e(d_{k-1}) = 1$, то предложение 71, б)

[1]) Ср. Kaplanky [3], теорема 7; Maeda [7], стр. 104, теорема 4.9.

позволяет найти правильный элемент $a_k \leqslant d_{k-1}$. Из $\perp 2$ и предложения 69 вытекает $\perp$-независимость множества $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Ввиду предложения 68, б) и свойства Д, процесс построения a_i не может продолжаться бесконечно. Стало быть, для некоторого n будем иметь $e(d_n) < 1$. Поэтому $z = 1 - e(d_n) \neq 0$. Так как $zd_n \leqslant ze(d_n) = 0$, а z, ввиду предложения 60, централен, то, учитывая предложение 59, в), будем иметь $z = z\left(\sum_1^n a_i + d_n\right) = \sum_1^n za_i$. Из $\perp 2$ следует, что элементы $za_1, \ldots, za_n$ $\perp$-независимы, а из предложения 65, в), что $e(za_i) = ze(a_i) = z$. Таким образом, L_z оказывается $\perp$-однородной структурой ранга n. Еще раз применяя предложение 65, в), получаем

$$e(a(1-z)) = (1-z)e(a) = 1-z.$$

Следовательно, L_{1-z} полудистрибутивна и из нее описанным выше способом можно выделить $\perp$-однородный прямой сомножитель. Продолжая этот процесс по трансфинитам, убедимся в справедливости теоремы.

21. Размерность. Покажем, что при некоторых дополнительных условиях в полной дедекиндовой структуре с дополнениями может быть определена размерность.

Предложение 72. *Если в дедекиндовой структуре L с дополнениями выполнено условие*

$$\text{из } a \sim b \text{ и } b \sim c \text{ вытекает } a \sim c, \tag{88}$$

то

а) *если $a \sim b$, $b \prec c$ и $c \sim d$, то $a \prec d$;*

б) *если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$;*

в) *каждое из соотношений $a \prec b$, $a \succ b$, $a \sim b$ исключает два других:*

г) *если $a \sim b$ и $a \dotplus c \sim b \dotplus d$, то $c \sim d$;*

д) *пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, \ldots, b_n\}$ — независимые множества элементов из L. Если $a_i \sim b_i$ для $i = 1, \ldots, n$, то $\sum_1^n a_i \sim \sum_1^n b_i$. Если $a_i \precsim b_i$ для $i = 1, \ldots, n$, то $\sum_1^n a_i \precsim \sum_1^n b_i$.*

Доказательство. а) Из $b \prec c$ вытекает $b \sim c_1 < c$. Поэтому для $d_1 = P_{(c \to d)}(c_1)$, учитывая предложение 8 и условие (88), можно записать $a \sim b \sim c_1 \sim d_1 < d$, т. е. $a \prec d$.

б) Пусть $a \sim b_1 < b$, $b \sim c_1 < d$ и $c_2 = P_{(b \to c_1)}(b_1)$. Из предложения 8 и условия (88) вытекает, что $a \sim c_2$, а это и означает, что $a \precsim c$.

в) Если $a \precsim b$ и $a \sim b$, то $a \sim b_1 < b$. Из (88) вытекает, что $b_1 \sim b$, и применение НЗ дает $b_1 = b$. Противоречие. Аналогично показывается несовместимость $a \succsim b$ и $a \sim b$. Если $a \succsim b$ и $a \precsim b$, то $a \sim b_1 < b$ и $b \sim a_1 < a$. Как и выше, приходим к противоречию, получая $a \sim P_{(b \to a_1)}(b_1) < a$.

г) Сначала допустим, что $a \dot{+} c = b \dot{+} d = r$. Ввиду предложения 5, найдется такой элемент x, что

$$a \dot{+} x = b \dot{+} x = r = a \dot{+} c = b \dot{+} d.$$

Отсюда видно, что $c \sim x$ и $x \sim d$. Но тогда из (88) следует, что $c \sim d$. Переходя к общему случаю, положим $a_1 = P_{(a+c \to b+d)}(a)$ и $c_1 = P_{(a+c \to b+d)}(c)$. Тогда из предложения 8 и условия (88) вытекает, что $a_1 \sim b$ и

$$a_1 + c_1 = P_{(a+c \to b+d)}(a + c) = b + d.$$

В силу показанного выше, имеем $c_1 \sim d$, откуда, ввиду (88), получаем $c \sim d$.

д) Заметим, что достаточно доказать первое утверждение. Для $n = 1$ оно очевидно. Переходя к общему случаю, найдем c и d такие, что

$$a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n \dot{+} c = 1 = b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n \dot{+} d. \tag{89}$$

Из г) вытекает

$$a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n \dot{+} c \sim b_2 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n \dot{+} d.$$

Согласно индуктивному предположению,

$$a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n \sim b_2 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n.$$

Поэтому из г) вытекает, что $c \sim d$. Но тогда, применяя г) к равенству (89), будем иметь

$$a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n \sim b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n,$$

что и требовалось.

Теорема 15. *Пусть полная дедекиндова структура L с дополнениями удовлетворяет следующим требованиям*:

Д1. *Если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.*

Д2. *Для любых двух элементов $a, b \in L$ имеет место хотя бы одно из соотношений $a \precsim b$, $a \sim b$, $a \succsim b$.*

Д3. *В L не существует бесконечного независимого множества попарно перспективных ненулевых элементов,* Д4. *Для каждого m структура L обладает однородным базисом ранга 2^m.*

Тогда на L может быть определена такая действительная функция размерности D, что

1. $D(0)=0$, $D(1)=1$, $0 \leqslant D(a) \leqslant 1$ *для всех* $a \in L$.
2. $D(a+b)+D(ab)=D(a)+D(b)$.
3. *Если* $D(a)=0$, *то* $a=0$.
4. $D(a)=D(b)$ *тогда и только тогда, когда* $a \sim b$.

Для доказательства разобьем множество элементов структуры L на классы, собирая в каждом классе перспективные между собой элементы. Ввиду Д1, эти классы не пересекаются или совпадают. Условие Д1 позволяет также пользоваться предложением 72. Обозначим через $\overline{L}$ множество классов. Будем считать, что $\overline{a} \leqslant \overline{b}$, если для некоторых $a \in \overline{a}$ и $b \in \overline{b}$ имеет место $a \precsim b$. Ввиду предложения 72, а), результат не зависит от выбора элементов a и b.

Лемма 1. *Отношение $\leqslant$ превращает $\overline{L}$ в цепь*[1]).

Действительно, сравнимость любых двух элементов из $\overline{L}$ сразу следует из Д2. Проверку же свойств, определяющих частично упорядоченное множество (см., например, Биркгоф [1], стр. 16), легко провести, используя предложения 72, б) и в).

Если существуют $a \in \overline{a}$ и $b \in \overline{b}$ такие, что $ab=0$, то положим

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}.$$

Если $\overline{a} \geqslant \overline{b}$, то $\overline{b} \ni b \sim b' \leqslant a \in \overline{a}$. Положим

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{c},$$

где $c \in \overline{c}$ определено из соотношения $a = b' \dot{+} c$. Из Д1 и предложений 72, г), д) вытекает, что результаты операций $\oplus$ и «—» не зависят от выбора элементов a, b, b' и c. Ясно также, что $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{b} \oplus \overline{a}$.

Далее положим $0\overline{a} = \overline{0}$ для всякого $\overline{a} \in \overline{L}$. Если $1\overline{a}$, $2\overline{a}, \ldots, (n-1)\overline{a}$ уже определены и $(n-1)\overline{a} \oplus \overline{a}$ существует, то положим

$$n\overline{a} = (n-1)\overline{a} \oplus \overline{a}.$$

---

1) Цепью называется частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента сравнимы (Биркгоф [1], стр. 29).

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения*:

а) $\bar{a} \oplus \bar{b}$ *существует тогда и только тогда, когда* $\bar{a} \leqslant \bar{1} - \bar{b}$;

б) *если* $\bar{a} \oplus \bar{b}$ *существует, то* $(\bar{a} \oplus \bar{b}) - \bar{b} = \bar{a}$;

в) *уравнение* $\bar{a} \oplus \bar{x} = \bar{b}$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $\bar{a} \leqslant \bar{b}$; *если решение этого уравнения существует, то оно единственное и определяется формулой* $\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}$;

г) *если* $\bar{a} \oplus \bar{b}$ *существует, а* $\bar{b} \geqslant \bar{c}$, *то* $\bar{a} \oplus \bar{c}$ *существует и* $\bar{a} \oplus \bar{b} \geqslant \bar{a} \oplus \bar{c}$;

д) *если* $(\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c}$ *существует, то* $(\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c} = \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c})$;

е) *если обе части неравенства* $\bar{a} \oplus \bar{b} < \bar{a} \oplus \bar{c}$ *существуют, то* $\bar{b} < \bar{c}$;

ж) *если* $\bar{a} \geqslant \bar{b}$, $\bar{c} \geqslant \bar{d}$, $\bar{a} \geqslant \bar{c}$, $\bar{b} \leqslant \bar{d}$, *то* $\bar{a} - \bar{b} \geqslant \bar{c} - \bar{d}$.

Доказательство. а) Если $\bar{a} \oplus \bar{b}$ существует, то для подходящих a и b[1]) имеет место $ab = 0$. Если $a \dot{+} b \dot{+} c = 1$, то из предложения 2 следует, что $d = a \dot{+} c$ является дополнением элемента b. Отсюда и из определения операции «—» вытекает, что $\bar{d} = \bar{1} - \bar{b}$. Так как $a \leqslant d$, то $\bar{a} \leqslant \bar{1} - \bar{b}$. Допустим теперь, что $\bar{a} \leqslant \bar{1} - \bar{b}$. Тогда найдется дополнение d элемента b, лежащее в $\bar{1} - \bar{b}$, а значит и такое $a \in \bar{a}$, что $a \leqslant d$. Отсюда $ab \leqslant db = 0$, что и обеспечивает существование $\bar{a} \oplus \bar{b}$.

б) Так как для подходящих a и b имеет место $\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a \dot{+} b}$, то сразу из определения следует, что $\bar{a} = (\bar{a} \oplus \bar{b}) - \bar{b}$.

в) Если решение уравнения $\bar{a} \oplus \bar{x} = \bar{b}$ существует, то найдутся такие элементы a, x и b, что $a \dot{+} x = b$. Но тогда мы имеем $a \leqslant b$, откуда $\bar{a} \leqslant \bar{b}$. Если, наоборот, имеет место $\bar{a} \leqslant \bar{b}$, то можно найти такие a, b и c, что $a \dot{+} c = b$. Ясно, что $\bar{c} = \bar{b} - \bar{a}$ является решением нашего уравнения. Если $\bar{x}$ — какое-либо другое решение, то из б) вытекает, что $\bar{x} = (\bar{a} \oplus \bar{x}) - \bar{a} = \bar{b} - \bar{a}$.

---

[1]) Если не оговорено противное, мы будем считать, что $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ и т. д.

г) Найдем a, b и c, подчиненные условиям $ab = 0$ и $b \geqslant c$. Тогда $ac \leqslant ab = 0$ и $a \dotplus b \geqslant a \dotplus c$, откуда и следует справедливость свойства г).

д) Так как $(\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c}$ существует, то найдутся такие элементы a, b, c, что $ab = (a + b)\, c = 0$ [1]. Из предложения 2 вытекает, что $bc = 0$ и $a(b + c) = 0$. Следовательно, существуют $\bar{b} \oplus \bar{c}$ и $\bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c})$, причем

$$(\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c} = \overline{a \dotplus b \dotplus c} = \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c}).$$

е) Если $\bar{a} \oplus \bar{b} < \bar{a} \oplus \bar{c}$, то, согласно в), найдется такой $\bar{x} \neq \bar{0}$, что $(\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{x} = \bar{a} \oplus \bar{c}$. Ввиду д), отсюда следует, что $\bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{x}) = \bar{a} \oplus \bar{c}$. Но тогда из в) вытекает $\bar{b} \oplus \bar{x} = \bar{c}$, т. е. $\bar{b} < \bar{c}$.

ж) Если $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{y} = \bar{c} - \bar{d}$, то, учитывая в) и г), будем иметь

$$\bar{b} \oplus \bar{x} = \bar{a} \geqslant \bar{c} = \bar{d} \oplus \bar{y} \geqslant \bar{b} \oplus \bar{y}.$$

Если $\bar{b} \oplus \bar{x} = \bar{b} \oplus \bar{y}$, то, ввиду в), $\bar{x} = \bar{y}$. Если же $\bar{b} \oplus \bar{x} > \bar{b} \oplus \bar{y}$, то из е) сразу следует, что $\bar{x} > \bar{y}$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *если существуют $m\bar{a}$, $n\bar{a}$, а также $m\bar{a} \oplus n\bar{a}$ или $(m + n)\,\bar{a}$, то $(m + n)\,\bar{a} = m\bar{a} \oplus n\bar{a}$;*

б) *если существуют $n\bar{a}$ и $m(n\bar{a})$, то $(mn)\,\bar{a} = m(n\bar{a})$;*

в) *если $m \geqslant n$ и существует $m\bar{a}$, то $(m - n)\,\bar{a} = m\bar{a} - n\bar{a}$;*

г) *если $n(\bar{a} \oplus \bar{b})$ существует, то $n(\bar{a} \oplus \bar{b}) = n\bar{a} \oplus n\bar{b}$;*

д) *если существуют $\bar{a} - \bar{b}$ и $n\bar{a}$, то $n(\bar{a} - \bar{b}) = n\bar{a} - n\bar{b}$;*

е) *если $n\bar{a} = n\bar{b}$ и $n \neq 0$, то $\bar{a} = \bar{b}$;*

ж) *если $k\bar{a} \geqslant l\bar{a}$ и $\bar{a} \neq 0$, то $k \geqslant l$.*

Доказательство. а) и б) нетрудно вывести, используя лемму 2, д) и применяя метод полной математической индукции.

в) Ввиду а), имеем $m\bar{a} = (m - n)\,\bar{a} \oplus n\bar{a}$. Поэтому из леммы 2, в) вытекает, что $(m - n)\,\bar{a} = m\bar{a} - n\bar{a}$.

---

[1] Пусть $uc = 0$, где $u \in \bar{a} \oplus \bar{b}$. Тогда $u \sim a_1 \dotplus b_1$ где $a_1 \in \bar{a}$, $b_1 \in \bar{b}$. Положим $a = P_{(a_1 + b_1 \to u)}(a_1)$, $b = P_{(a_1 + b_1 \to u)}(b_1)$ и примем во внимание предложение 7.

г) Это утверждение тривиально при $n=0$ или 1. Если оно доказано для $n-1$, то, учитывая лемму 2, д), будем иметь

$$n(\bar{a}\oplus\bar{b})=(n-1)(\bar{a}\oplus\bar{b})\oplus\bar{a}\oplus\bar{b}=$$
$$=(n-1)\bar{a}\oplus(n-1)\bar{b}\oplus\bar{a}\oplus\bar{b}=n\bar{a}\oplus n\bar{b}.$$

д) Ввиду г) и леммы 2, в), имеем $n\bar{a}=n(\bar{a}-\bar{b})\oplus n\bar{b}$. Вторичное применение леммы 2, в) дает $n(\bar{a}-\bar{b})=n\bar{a}-n\bar{b}$.

е) Ввиду леммы 1, имеет место, например, $\bar{a}\geqslant\bar{b}$. Применяя д), получим $n(\bar{a}-\bar{b})=\bar{0}$, что возможно лишь при $\bar{a}-\bar{b}=\bar{0}$, т. е. при $\bar{a}=\bar{b}$.

ж) Если $k<l$, то из а) вытекает, что $l\bar{a}=k\bar{a}\oplus(l-k)\bar{a}$. С другой стороны, из леммы 2, в) вытекает существование такого элемента $\bar{b}$, что $k\bar{a}=l\bar{a}\oplus\bar{b}$. Отсюда, учитывая лемму 2, д), будем иметь

$$l\bar{a}=l\bar{a}\oplus\bar{b}\oplus(l-k)\bar{a}.$$

Но тогда лемма 2, в) приводит к $(l-k)\bar{a}=\bar{0}$. Так как $\bar{a}\neq\bar{0}$, то $l-k=0$. Противоречие.

Теперь приступим к построению функции D. Пусть $\bar{s}_\infty=\bar{0}$, а $\bar{s}_i$, $i=0, 1, \ldots,$ — такой элемент структуры $\bar{L}$, что из элементов структуры L, принадлежащих $\bar{s}_i$, можно выбрать однородный базис структуры L ранга 2^i. Положим

$$D(\bar{a})=\begin{cases}0, & \text{если } \bar{a}=\bar{0},\\ \dfrac{1}{2^i}, & \text{если } \bar{a}=\bar{s}_i,\ i\neq\infty.\end{cases}$$

Лемма 4. *Если $\infty>m\geqslant n$, то $\bar{s}_n=2^{m-n}\bar{s}_m$.*

Доказательство. Ввиду леммы 3, б), получаем $2^n\bar{s}_n=\bar{1}=2^m\bar{s}_m=2^n(2^{m-n}\bar{s}_m)$. Но отсюда, согласно лемме 3, е), вытекает, что $\bar{s}_n=2^{m-n}\bar{s}_m$.

Далее положим

$$D(k\bar{s}_m)=\frac{k}{2^m}.$$

Лемма 5. *Если $k\bar{s}_m\geqslant l\bar{s}_n$, то $D(k\bar{s}_m)\geqslant D(l\bar{s}_n)$.*

Доказательство. Если $\bar{s}_m=\bar{0}$, то справедливость леммы очевидна, так что допустим, что $\bar{s}_m\neq\bar{0}$. Если $m=n$, то из леммы 4 сразу следует, что $\bar{s}_m = \bar{s}_n$. Но тогда лемма 3, ж) приводит к $k \geqslant l$, что сразу доказывает справедливость леммы 5. Допустим теперь, что $m > n$. Учитывая леммы 3, б) и 4, можем написать: $k\bar{s}_m \geqslant l\bar{s}_n = 2^{m-n} l\bar{s}_m$. Так как $\bar{s}_m \neq \bar{0}$, то из леммы 3, ж) вытекает, что $k \geqslant 2^{m-n} l$. Поэтому

$$D(k\bar{s}_m) = \frac{k}{2^m} \geqslant \frac{2^{m-n} l}{2^m} = \frac{l}{2^n} = D(l\bar{s}_n).$$

Поскольку случай $m < n$ разбирается аналогично, то все доказано.

Лемма 6. *Если $D(k\bar{s}_m) \geqslant D(l\bar{s}_n)$, то $k\bar{s}_m \geqslant l\bar{s}_n$.*

Доказательство. Если $l\bar{s}_n = \bar{0}$, то справедливость леммы очевидна. Если $\bar{s}_m = \bar{0}$, то $D(l\bar{s}_n) = 0$, откуда $l\bar{s}_n = \bar{0}$. Поэтому можно считать, что $\frac{k}{2^m} \geqslant \frac{l}{2^n}$. Применение лемм 3, б) и 4 приводит к $l\bar{s}_n = 2^{m-n} l\bar{s}_m \leqslant k\bar{s}_m$, если $m \geqslant n$, и к $l\bar{s}_n \leqslant \leqslant 2^{n-m} k\bar{s}_n = k\bar{s}_m$, если $m \leqslant n$.

Ввиду свойства Д4, леммы 5 и 6 показывают, что проведенное построение выделяет из $\bar{L}$ цепь $\bar{S}$, изоморфную (в структурном смысле) цепи двоичных дробей отрезка [0, 1].

Если $\bar{a} \in \bar{L}$ и $\bar{a} \neq 0$, то, ввиду свойства Д2, для каждого i, $i = 0, 1, 2 \ldots$, найдется такое целое число k_i, что

$$(k_i - 1)\bar{s}_i < \bar{a} \leqslant k_i\bar{s}_i.$$

Лемма 7. *Если $\bar{a} \neq \bar{0}$, то $\frac{k_{i+1}}{2^{i+1}} \leqslant \frac{k_i}{2^i}$ и $\frac{k_{i+1} - 1}{2^{i+1}} \geqslant \frac{k_i - 1}{2^i}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 4, $2(k_i - 1)\bar{s}_{i+1} < \bar{a} \leqslant 2k_i\bar{s}_{i+1}$. Отсюда $k_{i+1} \leqslant 2k_i$ и $k_{i+1} - 1 \geqslant 2(k_i - 1)$. Поэтому $\frac{k_{i+1}}{2^{i+1}} \leqslant \frac{k_i}{2^i}$ и $\frac{k_{i+1} - 1}{2^{i+1}} \geqslant \frac{k_i - 1}{2^i}$. Ввиду леммы 7, мы можем положить

$$D(\bar{a}) = \lim_{i \to \infty} \frac{k_i}{2^i}.$$

Лемма 8. *Если $D(\bar{a}) = \frac{k}{2^n}$, то $\bar{a} = k\bar{s}_n$.*

Доказательство. Поскольку $D(\bar{a}) = \frac{k}{2^n}$, то $\frac{k_m}{2^m} \geqslant \frac{k}{2^n}$ для всех m. Отсюда

$$D(k\bar{s}_n) = \frac{k}{2^n} \leqslant \frac{k_m}{2^m} = D(k_m\bar{s}_m).$$

Если $\bar{a} \leqslant k\bar{s}_n$ и мы применим леммы 2, в), 6, 2, ж) и 3, в), то будем иметь

$$\bar{c} = k\bar{s}_n - \bar{a} \leqslant k_m\bar{s}_m - (k_m - 1)\bar{s}_m = \bar{s}_m$$

для всех m. Если $\bar{c} \neq 0$, то, ввиду Д3, найдется такое m, что $m\bar{c}$ не существует. Однако из леммы 2, г) и существования $m\bar{s}_m = 1$ нетрудно вывести, что элемент $m\bar{c}$ должен существовать для всех m. Полученное противоречие приводит к $\bar{c} = \bar{0}$, а значит, к $\bar{a} = k\bar{s}_n$.

Допустим теперь, что $\bar{a} > k\bar{s}_n$. Тогда $k \leqslant k_n - 1$. Если $k < k_n - 1$, то $D(\bar{a}) \geqslant \frac{k_n - 1}{2^n} > \frac{k}{2^n}$. Следовательно, $k = k_n - 1$. Отсюда

$$\lim \frac{k_m - 1}{2^m} = \frac{k}{2^n} = \frac{k_n - 1}{2^n}.$$

Поэтому из леммы 7 вытекает, что $k_m = k_n$ для всех m. Но тогда $D(\bar{a}) = \frac{k}{2^n} = \lim\limits_{m \to \infty} \frac{k_n - 1}{2^m} = 0$. Ввиду леммы 7, это возможно лишь при $\bar{a} \leqslant \bar{s}_m$ для всех m. Но тогда, согласно лемме 2, г), $m\bar{a}$ существует для всех m. Ввиду Д3, отсюда вытекает, что $\bar{a} = \bar{0}$.

Лемма 9. *Соотношение $D(\bar{a}) \geqslant D(\bar{b})$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{a} \geqslant \bar{b}$.*

Доказательство. Если $\bar{a} \geqslant \bar{b}$, то справедливость соотношения $D(\bar{a}) \geqslant D(\bar{b})$ очевидна. Пусть теперь $D(\bar{a}) \geqslant D(\bar{b})$, $\bar{a}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ и

$$(k_i - 1)\bar{s}_i < \bar{a} \leqslant k_i\bar{s}_i,$$
$$(l_i - 1)\bar{s}_i < \bar{b} \leqslant l_i\bar{s}_i.$$

Ввиду леммы 7, $D(\bar{b}) \geqslant \frac{l_i - 1}{2^i}$. Если для некоторого i имеет место $k_i < l_i$, то

$$D(\bar{a}) \leqslant \frac{k_i}{2^i} \leqslant \frac{l_i - 1}{2^i} \leqslant D(\bar{b}).$$

Следовательно, $D(\bar{a}) = D(\bar{b}) = \frac{k_i}{2^i}$ и лемма 8 дает

$$\bar{a} = k_i\bar{s}_i = \bar{b}.$$

Теперь допустим, что для всех i имеет место $k_i \geqslant l_i$, но $\bar{b} > \bar{a}$. Тогда, согласно лемме 2, в), $\bar{d} = \bar{b} - \bar{a}$ существует и отличен от $\bar{\bar{0}}$. Но из лемм 2, ж) и 3, в) вытекает

$$\bar{d} \leqslant l_i\bar{s}_i - (k_i - 1)\bar{s}_i \leqslant k_i\bar{s}_i - (k_i - 1)\bar{s}_i = \bar{s}_i$$

для всех i. Рассуждая, как в конце доказательства леммы 8, получим, что $\bar{d} = 0$. Противоречие. Остается рассмотреть случаи, когда $\bar{a} = \bar{0}$ или $\bar{b} = \bar{0}$. При $\bar{b} = \bar{0}$ справедливость леммы очевидна. Если же $\bar{a} = 0$, то $D(\bar{b}) \leqslant D(\bar{a}) = 0$, и лемма 8 дает $\bar{b} = 0$. Все доказано.

Положим $D(a) = D(\bar{a})$. Ввиду лемм 8 и 9, ясно, что функция D обладает свойствами 1, 3 и 4. Чтобы доказать справедливость свойства 2, установим, что

$$D(\bar{a} \oplus \bar{b}) = D(\bar{a}) + D(\bar{b}). \tag{90}$$

В самом деле, пусть

$$(k_i - 1)\bar{s}_i < \bar{a} \leqslant k_i\bar{s}_i,$$

$$(l_i - 1)\bar{s}_i < \bar{b} \leqslant l_i\bar{s}_i,$$

$$(m_i - 1)\bar{s}_i < \bar{a} \oplus \bar{b} \leqslant m_i\bar{s}_i.$$

Если $k_i + l_i \leqslant 2^i$, то из лемм 2, г) и 3, а) вытекает

$$(k_i + l_i - 2)\bar{s}_i < \bar{a} \oplus \bar{b} \leqslant (k_i + l_i)\bar{s}_i,$$

откуда

$$m_i = k_i + l_i - \varepsilon_i, \tag{91}$$

где $\varepsilon_i = 0$ или 1. Если же $k_i + l_i > 2^i$, то $k_i + l_i - 2 = 2^i - 1 = m_i - 1$. Следовательно, соотношение (91) имеет место и в этом случае. Поэтому

$$D(\bar{a} \oplus \bar{b}) = \lim \frac{k_i + l_i - \varepsilon_i}{2^i} = \lim \frac{k_i}{2^i} + \lim \frac{l_i}{2^i} - \lim \frac{\varepsilon_i}{2^i} = $$
$$= D(\bar{a}) + D(\bar{b}).$$

Справедливость свойства 2 при $ab = 0$ сразу следует из (90):

$$D(a \dotplus b) = D(\bar{a} \oplus \bar{b}) = D(\bar{a}) + D(\bar{b}) = D(a) + D(b).$$

Пусть теперь a и b произвольны. Если $a = ab \dotplus a_1$ и $b = ab \dotplus b_1$, то П31 и П32 дают

$$ab_1 = abb_1 = 0$$

и

$$a + b = a + ab + b_1 = a \dotplus b_1.$$

Поэтому, учитывая уже доказанный случай свойства 2, будем иметь

$$D(a+b)=D(a\dot{+}b_1)=D(a)+D(b_1)=D(a)+D(b)-D(ab).$$

Предложение 73. *Если полная дедекиндова структура L с дополнениями обладает свойством Д2 теоремы 15, то 0 и 1 являются единственными ее центральными элементами.*

Доказательство. Если z — центральный элемент структуры L, то из Д2 и предложения 62, в) вытекает, что $z \leqslant 1-z$ или $1-z \leqslant z$. Умножая эти неравенства соответственно на z и $1-z$, получаем $z \leqslant 0$ или $1-z \leqslant 0$.

Теорема 16. *Если полная дедекиндова структура L с дополнениями содержит D-элемент и обладает свойствами Д2 и Д3 теоремы 15, то L является конечномерной проективной геометрией и поэтому на ней может быть определена функция D, обладающая свойствами 1—4 теоремы* 15 (в качестве $D(a)$ можно взять размерность подпространства a, деленную на размерность всего пространства).

Лемма 1. *Всякий D-элемент $d \neq 0$ структуры L является атомом*[1]).

Для доказательства достаточно заметить, что из предложений 73 и 59 вытекает, что L_d состоит из двух элементов 0 и d.

Лемма 2. *Любые два атома структуры L перспективны.*

Действительно, если атомы p и q не перспективны, то, например, $p \prec\!\!\!\sim q$. Отсюда $p \sim q_1 < q$, т. е. $p=q_1=0$.

Лемма 3. *Для всякого ненулевого $a \in L$ найдется атом $p \leqslant a$.*

Доказательство. Из леммы 1 и условия теоремы вытекает, что в L содержится атом q. Ввиду Д2, $q \prec\!\!\!\sim a$, т. е. $q \sim p \leqslant a$. Из предложения 7 легко вывести, что p — атом.

Лемма 4. *Если $a < b$, то найдется такой атом $p \leqslant b$, что $ap=0$.*

Действительно, пусть $b=a\dot{+}c$. Так как $c \neq 0$, то из леммы 3 вытекает существование атома $p \leqslant c \leqslant b$. Но $ap \leqslant ac=0$.

Лемма 5. *Все цепи структуры L конечны.*

Доказательство. Пусть цепь $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ бесконечна. Пользуясь леммой 4, найдем такие атомы p_i,

---

[1]) Элемент $a \neq 0$ называется атомом, если из $0 \leqslant x < a$ вытекает, что $x=0$ (см. Биркгоф [1], стр. 24).

$i=1, 2, \ldots,$ что $p_i \leqslant a_{i+1}$, $p_i a_i = 0$. Так как $p_i p_{i+k} \leqslant \leqslant a_{i+k} p_{i+k} = 0$, то все эти атомы различны. Ввиду леммы 2, этот результат противоречит Р3. Рассмотрение убывающей цепи проводится аналогично.

Для доказательства теоремы 16 заметим, что из предложения 73 вытекает неразложимость структуры L в прямое произведение. Но тогда наш результат вытекает из леммы 5 и одного утверждения в книге Биркгофа ([1], стр. 175, следствие б).

§ 6. НЕПРЕРЫВНЫЕ ГЕОМЕТРИИ

22. Определение.

Предложение 74. *Следующие свойства полной структуры L эквивалентны*:

I. *Если D — направленное множество индексов* (Биркгоф, [1], стр. 13) *и* $\delta' \geqslant \delta''$ $(\delta', \delta'' \in D)$ *влечет* $a_{\delta'} \geqslant a_{\delta''}$ $(a_{\delta'}, a_{\delta''} \in L)$, *то* $b \sum\limits_{\delta \in D} a_\delta = \sum\limits_{\delta \in D} b a_\delta$ *для всякого* $b \in L$[1]).

II. *Если Ω — некоторый трансфинит и $\alpha < \beta < \Omega$ влечет $a_\alpha \leqslant a_\beta$, где a_α, $a_\beta \in L$, то* $b \sum\limits_{\alpha < \Omega} a_\alpha = \sum\limits_{\alpha < \Omega} b a_\alpha$.

III. *Если $S \subset L$ и* $b \sum\limits_{M} a_\alpha = \sum\limits_{M} b a_\alpha$ *имеет место для всякого конечного подмножества M множества S, то* $b \sum\limits_{S} a_\alpha = \sum\limits_{S} b a_\alpha$.

Доказательство. I $\to$ III. Совокупность $\{M_\nu\}$ конечных подмножеств множества S образует множество D, направленное по включению. Если $s_\nu = \sum\limits_{M_\nu} a_\alpha$, то $b s_\nu = \sum\limits_{M_\nu} b a_\alpha$.

Поэтому, применяя I, получаем $b \sum\limits_{S} a_\alpha = b \sum\limits_{D} s_\nu = \sum\limits_{D} b s_\nu = \sum\limits_{S} b a_\alpha$.

III $\to$ II. Пусть $\{a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_n}\}$ — конечное подмножество множества $\{a_\alpha, \alpha < \Omega\}$ и a_{α_n} — его наибольший элемент. Ввиду ПЗ2,

$$b \sum_{1}^{n} a_{\alpha_i} = b a_{\alpha_n} = \sum_{1}^{n} b a_{\alpha_i}.$$

Применяя III, будем иметь $b \sum\limits_{\alpha < \Omega} a_\alpha = \sum\limits_{\alpha < \Omega} b a_\alpha$.

---

[1]) Свойство I и дуальное ему называют *аксиомами непрерывности*.

Лемма. *Если D — бесконечное направленное множество, то существует трансфинитная последовательность D_α, $\alpha < \Omega$, направленных подмножеств множества D, обладающая следующими свойствами*:

1) (мощность D_α) $<$ (мощность D);

2) *если* $\alpha < \beta < \Omega$, *то* $D_\alpha \subset D_\beta$;

3) $D = \bigcup\limits_{\alpha < \Omega} D_\alpha$.

Доказательство. Если M — конечное подмножество множества D, то обозначим через δ_M такой элемент из D, что $\delta_M \geqslant \delta$ для всех $\delta \in M$. Допустим сначала, что D счетно. Тогда можно найти конечные подмножества $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ множества D такие, что $M_i \subset M_{i+1}$ и $D = \bigcup M_i$. Положим $D_1 = M_1 \cup \delta_{M_1}$ и $D_{i+1} = D_i \cup M_{i+1} \cup \delta_{D_i \cup M_{i+1}}$. Ясно, что подмножества D_i направленные и обладают свойствами 1), 2) и 3). Если D несчетно, $C \subset D$ и мощность C меньше мощности D, то обозначим через $M(C)$ множество конечных подмножеств множества C и положим $F_1(C) = C \bigcup \left(\bigcup\limits_{M_\alpha \in M(C)} \delta_{M_\alpha} \right)$.

Пусть $F_{i+1}(C) = F_1(F_i(C))$ и $F(C) = \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant \infty} F_i(C)$. Если M — конечное подмножество множества $F(C)$, то $M \subset F_n(C)$ для некоторого n. Так как $\delta_M \in F_{n+1}(C) \subset F(C)$, то $F(C)$ — направленное множество. Если C конечно, то конечно и $F_i(C)$, а значит, $F(C)$ конечно или счетно. Если C бесконечно, то мощности множеств $M(C)$ и C совпадают[1]). Поэтому (мощность $F_1(C)$) $\leqslant$ (мощность C) $+$ (мощность $M(C)$) $=$ $=$ (мощность C)[2]). Рассуждая по индукции, установим, что (мощность $F_i(C)$) $\leqslant$ (мощность C). Отсюда следует, что (мощность $F(C)$) $\leqslant \aleph_0$ (мощность C) $=$ (мощность C). Таким образом, в обоих случаях мощность $F(C)$ меньше мощности D. Теперь найдем систему $\{C_\alpha, \alpha < \Omega\}$ подмножеств множества D, обладающую свойствами 1) — 3)[3]). Легко понять, что множества $D_\alpha = F(C_\alpha)$ дадут искомую систему направленных подмножеств.

---

[1]) Это легко вывести по индукции, например, из результатов книги Александрова П. С. «Введение в теорию множеств и функций», М. — Л., 1948, стр. 111, теорема 22″ и стр. 110, теорема 22′.

[2]) Та же книга, стр. 110, теорема 22′.

[3]) Для доказательства возьмем наименьший трансфинит Ω, имеющий ту же мощность, что и D. Затем отобразим D на множество трансфинитов $\leqslant \Omega$ и обозначим через C_α множество элементов, имеющих номер $\leqslant \alpha < \Omega$.

II $\to$ I. Допустим, что существуют направленные множества индексов, для которых не имеет места свойство I. Среди всех таких множеств выберем множество D, имеющее наименьшую мощность. Так как для конечных направленных множеств свойство I очевидно, то D бесконечно. Пусть $\{D_\alpha,\ \alpha < \Omega\}$ — трансфинитная последовательность, указанная в лемме. Ввиду 1), каждое из D_α обладает свойством I. Применяя 2), 3) и II, получим

$$b \sum_{\delta \in D} a_\delta = b \sum_{\alpha < \Omega} \Big(\sum_{\delta \in D_\alpha} a_\delta \Big) = \sum_{\alpha < \Omega} \Big(b \sum_{\delta \in D_\alpha} a_\delta \Big) =$$

$$= \sum_{\alpha < \Omega} \Big(\sum_{\delta \in D_\alpha} b a_\delta \Big) = \sum_{\delta \in D} b a_\delta,$$

что противоречит выбору D.

Полную дедекиндову структуру с дополнениями, обладающую свойством I предложения 74 и свойством, дуальным к нему, назовем *непрерывной геометрией*.

Пример непрерывной геометрии приведен в книге Биркгофа ([1], гл. VIII, § 10).

23. Независимость в непрерывных геометриях.

Предложение 75. *Множество элементов $\{a_\alpha,\ \alpha \in I\}$ непрерывной геометрии является независимым тогда и только тогда, когда независимы все его конечные подмножества.*

Доказательство. Допустим, что все конечные подмножества множества $\{a_\alpha\}$ независимы. Пусть $I = I_1 \cup I_2$, причем $I_1 \cap I_2$ пусто. Так как при любом выборе конечных множеств $M_i \subset I_i$, $i = 1, 2$, множество $\{x_\alpha,\ \alpha \in M_1 \cup M_2\}$ независимо, то $\Big(\sum_{\alpha \in M_1} a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\alpha \in M_2} a_\alpha\Big) = 0$. Отсюда, ввиду свойства III, получаем $\Big(\sum_{\alpha \in M_1} a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\alpha \in I_2} a_\alpha\Big) = 0$, после чего вторичное применение свойства III дает $\Big(\sum_{\alpha \in I_1} a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\alpha \in I_2} a_\alpha\Big) = 0$. Независимость множества $\{a_\alpha\}$ доказана. Поскольку обратное утверждение очевидно, то доказано и все предложение.

Предложение 76. *Если каждое из множеств $\{S_\alpha,\ \alpha < \Omega\}$ элементов непрерывной геометрии независимо и из $\alpha < \beta < \Omega$ вытекает $S_\alpha \subset S_\beta$, то множество $S = \bigcup_{\alpha < \Omega} S_\alpha$ также независимо.*

Доказательство. Если множество S не является независимым, то, согласно предложению 75, найдется конечное множество $M \subset C$, не являющееся независимым. Но $M \subset S_\alpha$ для некоторого α, что противоречит независимости S_α.

Предложение 77. *Если в непрерывной геометрии G как каждое из множеств $S_\alpha = \{a_{\alpha\beta}, \beta \in I_\alpha, \alpha \in I\}$, так и множество $\left\{\sum_{\beta \in I_\alpha} a_{\alpha\beta}, \alpha \in I\right\}$ независимы, то множество $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ также независимо.*

Доказательство. Пусть M — произвольное конечное подмножество множества S. Тогда

$$M = (M \cap S_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup (M \cap S_{\alpha_k}).$$

Каждое из множеств $M \cap S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, независимо. Кроме того, из независимости множества $\left\{\sum_{\beta \in I_\alpha} a_{\alpha\beta}, \alpha \in I\right\}$, очевидно, вытекает независимость множества $\left\{\sum_{M \cap S_{\alpha_1}} a_{\alpha_1\beta}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \sum_{M \cap S_{\alpha_k}} a_{\alpha_k\beta}\right\}$. Поэтому предложение 4 обеспечивает независимость множества M. Теперь остается только принять во внимание предложение 75.

24. Перспективность в непрерывных геометриях.

Предложение 78. *Если G — непрерывная геометрия, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — перспективы, $\varphi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$, $a\varphi(a) = 0$, то $a \sim \varphi(a)$.*

Доказательство. Пусть Φ — система таких независимых подмножеств T множества L_a, что из $x \in T$ вытекает $x \sim \varphi(x)$. Ввиду предложения 76 и леммы Куратовского — Цорна (Биркгоф [1], стр. 73, АС2), в Φ найдется максимальное множество W. Пусть $z = \sum_W x$ и $a = z \dotplus u$. Если $u \neq 0$, то, применив предложение 57, найдем такой элемент u', что $0 < u' \leqslant u$ и $u' \sim \varphi(u')$. Так как из предложения 77 вытекает независимость множества $W \cup u'$, то мы вступаем в противоречие с максимальностью множества W. Следовательно, $u = 0$, а значит, $a = \sum_W x$. Предложение 77 показывает, что естественное отношение $\perp$ структуры G обладает свойством B. Из того же предложения 77 вытекает, что множество $\{x \dotplus \varphi(x), x \in W\}$ независимо. Поэтому, применяя предложение 70 и учитывая, что φ — взаимно однозначное отображение, сохраняющее порядок, будем иметь

$$a = \sum_W x \sim \sum_W \varphi(x) = \varphi\left(\sum_W x\right) = \varphi(a).$$

Предложение 79. *Для любых двух элементов* a, b *непрерывной геометрии найдутся такие элементы* a', a'', b', b'', *что* $a = a' \dot{+} a''$, $b = b' \dot{+} b''$, $a' \sim b'$, $e(a'')\,e(b'') = 0$, $e(a') = e(b') = e(a)\,e(b)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $ab = 0$. Обозначим через S совокупность всех пар (a_α, b_α), удовлетворяющих условиям $a_\alpha \leqslant a$, $b_\alpha \leqslant b$, $a_\alpha \sim b_\alpha$. Пусть, далее, Φ — система таких подмножеств T множества S, что:

а) если (a_α, b_α), $(a_\beta, b_\beta) \in T$, то $a_\alpha = a_\beta$ влечет $b_\alpha = b_\beta$, и наоборот;

б) как система элементов $\{a_\alpha\}$, так и система элементов $\{b_\alpha\}$, входящих в пары, принадлежащие T, независимы.

Допустим, что $\{T_\lambda\}$ — возрастающая цепь множеств из Φ и $T = \bigcup T_\lambda$. Ясно, что T обладает свойством а). Из предложения 76 вытекает, что T обладает также и свойством б). Таким образом, $T \in \Phi$. Теперь можно применить лемму Куратовского — Цорна (Биркгоф, [1], стр. 73, АС2) и обозначить через W некоторое максимальное множество системы Φ. Положим $a' = \sum_{(a_\alpha b_\alpha) \in W} a_\alpha$, $b' = \sum_{(a_\alpha, b_\alpha) \in W} b_\alpha$. Так как $a'b' \leqslant ab = 0$, то из предложения 77 вытекает независимость множества $\{a_\alpha + b_\alpha\}$. Учитывая, что предложение 77 позволяет применить предложение 70, будем иметь $a' \sim b'$. Пусть теперь $a = a' \dot{+} a''$, $b = b' \dot{+} b''$. Если $e(a'')\,e(b'') \neq 0$, то, согласно предложению 66, найдутся такие элементы a_λ и b_λ, что $0 < a_\lambda \leqslant a''$, $0 < b_\lambda \leqslant b''$, $a_\lambda \sim b_\lambda$. Ввиду предложения 77, множество $W' = W \cup (a_\lambda, b_\lambda)$ обладает свойством б). Поскольку при $(a_\alpha, b_\alpha) \in W$ из $a_\lambda = a_\alpha$ вытекает $a_\lambda \leqslant a'a'' = 0$, а из $b_\lambda = b_\alpha$ — $b_\lambda \leqslant b'b'' = 0$, то W' обладает и свойством а). Противоречие с максимальностью W доказывает, что $e(a'')\,e(b'') = 0$.

Переходя к общему случаю, обозначим через a_1 и b_1 дополнения элемента ab в a и b соответственно. Из П31 вытекает, что $a_1 b_1 = a_1 a b b_1 = 0$. Поэтому, учитывая уже доказанное, можно найти такие элементы a_1', a'', b_1', b'', что $a_1 = a_1' \dot{+} a''$, $b_1 = b_1' \dot{+} b''$, $a_1' \sim b_1'$, $e(a'')\,e(b'') = 0$. Положив $a' = ab + a_1'$, $b' = ab + b_1'$ и учитывая предложение 2, будем иметь $a = a' \dot{+} a''$, $b = b' \dot{+} b''$. Согласно предложению 5, найдется такой элемент x, что $a_1' \dot{+} x = b_1' \dot{+} x = a_1' + b_1'$. Ясно, что

$$a' + x = ab + a_1' + x = ab + b_1' + x = b' + x.$$

Применяя ПЗ1, получим $ab_1' \leqslant (ab)\,b_1 = 0$ и $a_1'b \leqslant a_1\,(ab) = 0$. Отсюда, ввиду ПЗ1 и МЗ, вытекает

$$a'x = (ab + a_1')(a_1' + b_1')\,x = [ab\,(a_1' + b_1') + a_1']\,x = \\ = [b\,(a_1' + ab_1') + a_1']\,x = a_1'x = 0.$$

Аналогично проверяется, что $b'x = 0$. Таким образом, $a' \dotplus x = b' \dotplus x$, т. е. $a' \sim b'$. Используя ПЗ2 и предложения 65, а), 65, г) и 64, будем иметь $e\,(a') = e\,(b')$, а также

$$e\,(a)\,e\,(b) = [e\,(a') + e\,(a'')]\,[e\,(b') + e\,(b'')] = \\ = e\,(a') + e\,(a'')\,e\,(b') + e\,(a')\,e\,(b'') = e\,(a').$$

Предложение 80. *Если элементы $a_1, a_2, \ldots$ непрерывной геометрии G независимы и $a_1 \sim a_i$ для $i = 2, 3 \ldots$, то $a_1 = 0$.*

Доказательство. Согласно предложению 5, найдутся такие $i = 2, 3, \ldots$, что

$$a_1 \dotplus x_i = a_i \dotplus x_i = a_1 \dotplus a_i.$$

Так как $a_1 \leqslant a_i + x_i$, то $a_1 \leqslant b_k + \sum_{2 \leqslant i < \infty} x_i$, где $b_k = \sum_{k \leqslant i < \infty} a_i$, $k = 2, 3 \ldots$ Если $b = \prod_{2 \leqslant k < \infty} b_k$, то $b \sum_2^n a_i \leqslant b_{n+1} \sum_2^n a_i = 0$. Так как $\sum_2^3 a_i \leqslant \sum_2^4 a_i \leqslant \ldots$ и $b_2 = \sum_{3 \leqslant k < \infty} \left(\sum_2^k a_i \right)$, то свойство II предложения 74 дает

$$b = bb_2 = \sum_{3 \leqslant k < \infty} b \sum_2^b a_i = 0.$$

Поэтому применение свойства, дуального свойству II предложения 74, приводит к

$$a_1 \leqslant \prod_{2 \leqslant k < \infty} \left(b_k + \sum_{2 \leqslant i < \infty} x_i \right) = 0 + \sum_{2 \leqslant i < \infty} x_i. \tag{92}$$

С другой стороны, $a_1x_2 = 0$, а из $(a_1 + x_2 + \ldots + x_{l-1})\,x_l = 0$, ПЗ1 и предложения 3 вытекает

$$(a_1 + x_2 + \ldots + x_l)\,x_{l+1} = \\ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_l)(a_1 + a_{l+1})\,x_{l+1} = a_1x_{l+1} = 0.$$

Теперь из предложения 2 следует независимость множества $\{a_1, x_2, \ldots, x_n\}$ для каждого n. Поэтому предложение 75 обеспечивает независимость множества $\{a_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Отсюда и из (92) получаем $a_1 = a_1 \sum\limits_{2 \leqslant i < \infty} x_i = 0$.

Теорема 17. *В непрерывной геометрии перспективность транзитивна, т. е. из $a \sim c$ и $c \sim b$ вытекает $a \sim b$* [1]).

Лемма. *Если φ — произведение перспектив, $b = \varphi(a)$ и $a \geqslant b$, то $a = b$.*

Действительно, пусть $c_1 = b$ и $c_0 = a_1 \dot{+} c_1 = a$. Допустим, что построены $a_1, \ldots, a_k$ и $c_0, c_1, \ldots, c_k$, подчиненные условиям: $a_i \dot{+} c_i = c_{i-1}$, $a_i = \varphi(a_{i-1})$, $c_i = \varphi(c_{i-1})$. Положив $c_{k+1} = \varphi(c_k)$ и $a_{k+1} = \varphi(a_k)$, нетрудно проверить, что эти условия сохраняются. Так как

$$a_i(a_{i+1} + \ldots + a_{i+p}) \leqslant a_i c_i = 0,$$

то из предложения 2 вытекает независимость множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$ для каждого n. Применив предложение 75, убедимся в независимости множества $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Ясно, что $a_k = \varphi^{k-1}(a_1)$. Поэтому из предложения 78 следует, что $a_1 \sim a_k$, откуда, ввиду предложения 80, получаем $a_1 = 0$. А это и означает, что $a = b$. Лемма доказана.

Приступая к доказательству теоремы, допустим, что a', a'', b', b'' — элементы, указанные в предложении 79. Так как $e(a'')b'' = 0$, то, учитывая предложение 59, будем иметь $e(a'')b = e(a'')(b' + b'') = e(a'')b'$. Отсюда, учитывая предложение 62, а), получаем

$$e(a'')a \sim e(a'')c, \quad e(a'')c \sim e(a'')b', \quad e(a'')b' \sim e(a'')a'.$$

Так как $e(a'')a' \leqslant e(a'')a$, то, ввиду леммы, будем иметь $e(a'')a' = e(a'')a$. Отсюда, принимая во внимание предложение 59, в), приходим к

$$e(a'')a' = e(a'')a = e(a'')a' \dot{+} e(a'')a''.$$

Следовательно, $a'' = e(a'')a'' = 0$. Аналогично проверяется, что $b'' = 0$. Таким образом, $a = a' \sim b' = b$.

Предложение 81. *Пусть G — непрерывная геометрия,*

$$a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m = b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n = 1, \quad a_i \sim a_j, \quad b_i \sim b_j.$$

Если $m = n$, то $a_1 \sim b_1$. Если $m > n$, то $a_1 \prec b_1$.

---

[1]) Neumann [6]; Halperin [1].

Доказательство. Ввиду предложения 79, $a_1 = a^1 \dot{+} a^2$, $b_1 = b^1 \dot{+} b^2$, $a^1 \sim b^1$, $e(a^2)\,e(b^2) = 0$. Положим $a_i^k = P_{(a_1 \to a_i)}(a^k)$, $b_i^k = P_{(b_1 \to b_i)}(b^k)$, $k = 1, 2$. Если $m \geqslant n$, то из теоремы 17, предложений 59, в), 65, а), 62, а) и 72, д) следует

$$e(a^2) = \sum_1^n e(a^2)\,b_k = \sum_1^n \left[e(a^2)\,b_k^1 + e(a^2)\,e(b^2)\,b_k^2\right] \sim \sum_1^n e(a^2)\,a_k^1.$$

Поэтому, учитывая предложение 59, д), получаем

$$e(a^2) = \sum_1^n e(a^2)\,a_k^1 \leqslant \sum_1^n a_k^1.$$

Теперь, принимая во внимание С3, будем иметь

$$a^2 = a^2 e(a^2) \leqslant a^2\left(a^1 + \sum_2^n a_k^1\right) = a^2 a^1 = 0.$$

Таким образом, $a_1 = a^1 \sim b^1 \leqslant b_1$, т. е. $a_1 \precsim b_1$. Если $m = n$, то, ввиду равноправия a_1 и b_1, имеем $a_1 \succsim b_1$, и теорема 17 вместе с предложением 72, в) приводит к $a_1 \sim b_1$. Если же $m > n$ и $b^1 = b_1$, то $b^2 = 0$. Поэтому из теоремы 17 и предложения 72, д) вытекает

$$1 = \sum_1^n b_i = \sum_i^n b_i^1 \sim \sum_1^n a_i^1 \leqslant \sum_1^n a_i < 1,$$

что противоречит предложению 59, д).

25. Строение непрерывных геометрий и их размерность.

Предложение 82. *Непрерывная геометрия G удовлетворяет условию* Д2 *теоремы* 15 *тогда и только тогда, когда она неразложима в прямое произведение.*

Доказательство. Если G удовлетворяет условию Д2, то ее неразложимость сразу следует из предложения 73. Если G неразложима, то множество ее центральных элементов, очевидно, состоит из 0 и 1. Пусть a, $b \in G$, а a', a'', b', b'' — элементы, указанные в предложении 79. Тогда мыслимы следующие возможности:

$$\begin{cases} e(a'') = 0, \\ e(b'') = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} e(a'') = 0, \\ e(b'') = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} e(a'') = 1, \\ e(b'') = 0. \end{cases}$$

Следовательно, имеет место $a \sim b' < b$, $a = a' \sim b' = b$ или $a > a' \sim b$, что и требовалось.

Теорема 18. *Всякая непрерывная геометрия разлагается в прямое произведение антидистрибутивных и однородных структур. Антидистрибутивные сомножители обладают однородным базисом ранга 2^m для всякого m. Неразложимые однородные сомножители являются конечномерными проективными геометриями.*

Доказательство. Из предложений 76, 77 и 80 вытекает, что естественное отношение $\perp$ непрерывной геометрии обладает свойствами А, Б, В и Д, указанными на стр. 97. Поэтому первое утверждение теоремы сразу следует из теорем 11 и 14, второе является следствием теоремы 13, а третье вытекает из теоремы 16, если принять во внимание предложения 82 и 80.

Предложение 83. *Пусть на непрерывной геометрии G, неразложимой в прямое произведение, определена действительная функция $D(a)$, обладающая свойствами* 1—4 *теоремы* 15. *Тогда*:

а) $D(a) \geqslant D(b)$ *тогда и только тогда, когда* $a \succsim b$;

б) *если* $D(a_1) \leqslant D(a_2)$, ..., *то найдется такая последовательность* $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots$ *элементов из* G, *что* $a_i \sim b_i$, $i = 1, 2, \ldots$;

в) *если* $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — *конечная или счетная независимая система элементов из* G, *то* $D(\sum a_i) = \sum D(a_i)$ [1];

г) *если* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$, *то* $D(\sum a_i) = \lim\limits_{i \to \infty} D(a_i)$;

д) G *является конечномерной проективной геометрией или же значения функции* $D(a)$ *заполняют весь отрезок* $[0, 1]$.

Доказательство. в′) Установим справедливость свойства в) для конечного случая. Если указанная там система содержит один элемент, это очевидно, если два, то вытекает из свойства 2. Если $n > 2$, то, применяя индуктивное предположение, будем иметь

$$D(a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n) = D\left(\sum_1^{n-1} a_i\right) + D(a_n) = \sum_1^n D(a_i).$$

а) Если $D(a) \geqslant D(b)$, то, согласно предложению 82, имеет место $a \prec b$ или $a \succsim b$. Но в первом случае $a \sim b' < b$.

[1] Если рассматриваемая система бесконечна, то под $\sum D(a_i)$ понимается сумма ряда $D(a_1) + D(a_2) + \ldots$

Если $b = b' \dotplus c$, то из в') и свойства 4 вытекает

$$D(b) = D(b') + D(c) = D(a) + D(c) \geqslant D(b) + D(c).$$

Ввиду свойства 1, отсюда следует, что $D(c) = 0$. Поэтому свойство 3 дает $c = 0$, т. е. $b = b'$. Противоречие. Если $a \succsim b$, то $b \sim a' \leqslant a$. Если $a = a' \dotplus c$, то из свойств 1, 2, 3 и 4 вытекает

$$D(a) = D(a') + D(c) \geqslant D(a') = D(b).$$

б) Сразу следует из а) и предложения 61.

в) Сначала:

Лемма. *Если $a_1, a_2, \ldots$ — конечная или счетная последовательность элементов из G и $\sum D(a_i) \leqslant D(a)$, то найдется такая независимая последовательность $b_1, b_2, \ldots$ элементов из G, что $a_i \sim b_i \leqslant a$.*

Доказательство. Так как $D(a_1) \leqslant D(a)$, то, согласно а), $a_1 \sim b_1 \leqslant a$ для некоторого $b_1 \in G$. Допустим, что построена такая независимая система элементов $\{b_1, \ldots, b_k\}$, что $a_i \sim b_i \leqslant a$. Пусть $\sum\limits_1^k b_i \dotplus x = a$. Из в') и свойства 4 вытекает

$$\sum_1^{k+1} D(a_i) \leqslant D(a) = \sum_1^k D(b_i) + D(x) = \sum_1^k D(a_i) + D(x).$$

Следовательно, $D(a_{i+1}) \leqslant D(x)$ и для некоторого $b_{k+1} \in G$ имеет место $a_{k+1} \sim b_{k+1} \leqslant x \leqslant a$. Независимость системы $\{b_1, \ldots, b_{k+1}\}$ вытекает из предложения 2, а независимость системы $\{b_1, b_2, \ldots\}$ — из предложения 75.

Приступая к доказательству свойства в), заметим, что, ввиду в'), можно считать рассматриваемую последовательность бесконечной. Пусть $c_n = \sum\limits_{n < i < \infty} a_i$. Так как $c_n \sum\limits_1^n a_i = 0$, то предложение 2 обеспечивает независимость системы $\{a_1, \ldots$ $\ldots, a_n, c_n\}$. Ввиду в'),

$$D\left(\sum a_i\right) = \sum_1^n D(a_i) + D(c_n) \geqslant \sum_1^n D(a_i). \tag{93}$$

Отсюда вытекает, что ряд $\sum D(a_i)$ сходится, а значит, $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{n < i < \infty} D(a_i) = \lim\limits_{n \to \infty} D(a_n) = 0$. Пусть

$$D\left(\sum a_i\right) = \sum D(a_i) + \varepsilon. \tag{94}$$

Ясно, что $\varepsilon \geqslant 0$. Если $\varepsilon > 0$, то для подходящих m и n имеем

$$0 < \sum_{n < i < \infty} D(a_i) < D(a_m) < \varepsilon,$$

причем $m \leqslant n$. Лемма позволяет найти такую независимую систему элементов $\{b_1, b_2, \ldots\}$, что $a_{n+i} \sim b_i \leqslant a_m$. Так как

$$\Big(\sum_{1 \leqslant i < \infty} a_{n+i}\Big)\Big(\sum_{1 \leqslant i < \infty} b_i\Big) \leqslant a_m \sum_{1 \leqslant i < \infty} a_{n+i} = 0,$$

то из предложения 77 вытекает независимость системы $\{a_{n+1}, b_1, a_{n+2}, b_2, \ldots\}$, а из предложений 77 и 70 следует

$$c_n = \sum_{1 \leqslant i < \infty} a_{n+i} \sim \sum_{1 \leqslant i < \infty} b_i \leqslant a_m.$$

Учитывая а), свойство 4 и соотношения (93) и (94), будем иметь

$$\varepsilon = D\big(\sum a_i\big) - \sum D(a_i) \leqslant D\big(\sum a_i\big) - \sum_1^n D(a_i) =$$

$$= D(c_n) = D\Big(\sum_{1 \leqslant i < \infty} b_i\Big) \leqslant D(a_m) < \varepsilon.$$

Полученное противоречие показывает, что $\varepsilon = 0$.

г) Пусть $x_1 = a_1$ и $a_{i+1} = a_i \dot{+} x_{i+1}$. Тогда

$$(x_1 + \ldots + x_{k-1})\, x_k \leqslant a_{k-1}\, x_k = 0.$$

Ввиду предложения 2, система $\{x_1, \ldots, x_k\}$ независима для каждого k. Но тогда из предложения 75 вытекает независимость системы $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Кроме того,

$$a_n = a_{n-1} + x_n = a_{n-2} + x_{n-1} + x_n = \ldots$$

$$\ldots = a_2 + x_3 + \ldots + x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Применяя в), получим

$$D\big(\sum a_i\big) = D\big(\sum x_i\big) = \sum D(x_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n D(x_i) = \lim_{n \to \infty} D(a_n).$$

д) Пусть $t \in [0, 1]$. Ввиду свойства 1, можно считать, что $t \neq 0$. Пусть $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots$ — такая последовательность двоичных дробей, что $\lim t_i = t$. Если G не является конечномерной проективной геометрией, то из теоремы 18 следует, что G обладает однородным базисом ранга 2^m для всякого m. Кроме того, для однородного базиса $e_1, \ldots, e_n$ из в) и свойств 1 и 4 вытекает $D(e_k) = \frac{1}{n}$. Поэтому найдутся такие элементы $a_i \in G$, что $D(a_i)=t_i$. Ввиду б) и свойства 4, можно считать, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ Поэтому из г) вытекает

$$D\left(\sum a_i\right)=\lim_{i\to\infty} D(a_i)=\lim_{i\to\infty} t_i=t.$$

Теорема 19. *Если непрерывная геометрия G не разложима в прямое произведение, то на ней может быть определена действительная функция $D(a)$, обладающая свойствами* 1—4. *Если на G определена действительная функция $D'(a)$, обладающая свойствами* 1—4 *теоремы* 15, *то $D'(a)=D(a)$ для всех $a \in G$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 18, G является или конечномерной проективной геометрией, или антидистрибутивной структурой. В первом случае существование функции $D(a)$ со свойствами 1—4 очевидно. Во втором случае из теоремы 17, предложений 82 и 80 и теоремы 18 вытекает, что G обладает свойствами Д1 — Д4. Поэтому тот же результат вытекает из теоремы 15. Если G — n-мерная проективная геометрия, то $1=p_1 \dot{+} \ldots \dot{+} p_{n+1}$, где p_i — точки. Так как все они перспективны (см. лемму 2 на стр. 110), то из предложения 83, в) и свойств 1 и 4 вытекает, что $D'(p_i)=\frac{1}{n+1}=D(p_i)$. Отсюда легко вывести, что $D'(a)=$ $=D(a)$ для любого подпространства a. Допустим теперь, что G не является конечномерной проективной геометрией. Пусть $D'(a)=\frac{k}{2^m}$. Ввиду теоремы 18, G обладает однородным базисом $e_1, \ldots, e_{2^m}$. Из предложения 83, в) и свойств 1 и 4 вытекает, что $D'(e_i)=\frac{1}{2^m}=D(e_i)$. Поэтому предложение 83, в) приводит к $D'\left(\sum_1^k e_i\right)=\frac{k}{2^m}=D\left(\sum_1^k e_i\right)$.

Ввиду свойства 4, $a \sim \sum_1^k e_i$. Следовательно,

$$D'(a)=D'\left(\sum_1^k e_i\right)=D\left(\sum_1^k e_i\right)=D(a).$$

Пусть теперь $D'(a)=t$ и $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots$ — последовательность двоичных дробей, сходящаяся к t. Из предложений 83, д) и 83, б) и свойства 4 вытекает существование такой последовательности $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$, что $D'(a_i)=t_i$. Ввиду предложения 83, г),

$$D'\left(\sum a_i\right) = \lim t_i = t = D'(a).$$

Следовательно, $a \sim \sum a_i$. Кроме того, из показанного выше следует, что $D'(a_i) = D(a_i)$ для всех i. Поэтому, учитывая свойство 4 и предложение 83, г), будем иметь

$$D'(a) = t = \lim t_i = \lim D'(a_i) = \lim D(a_i) = D\left(\sum a_i\right) = D(a).$$

Теорема 19 может быть обобщена на произвольные непрерывные геометрии. Правда, в этом случае в качестве размерности элемента a выступает уже не действительное число, а действительная функция F_a, определенная на некотором топологическом пространстве T. В качестве T берется булево пространство (Биркгоф [1], гл. IX, §§ 2, 3), точнее:

Теорема. *Если G — непрерывная геометрия, то каждому элементу a из G может быть поставлена в соответствие действительная функция F_a, определенная на топологическом пространстве G. При этом:*

1) $0 \leqslant F_a \leqslant 1$, $F_0 \equiv 0$, $F_1 \equiv 1$;

2) *если* $a > 0$, *то* $F_a \not\equiv 0$;

3) *если* $a_1, \ldots, a_n$ — *независимое множество, то* $F_{\Sigma a_i} = \sum_i F_{a_i}$;

4) $F_{a+b} + F_{ab} = F_a + F_b$;

5) *соотношения* $a \succ b$, $a \sim b$ *и* $a \prec b$ *имеют место одновременно с соотношениями* $D(a) > D(b)$, $D(a) = D(b)$ *и* $D(a) < D(b)$ *соответственно.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Маеда (Maeda [7], стр. 112, теорема 1.4).

Маеда (Maeda [6]) обобщил эту теорему на полные $\perp$-структуры (дедекиндовость и наличие дополнений не предполагаются), в которых имеют место свойства: 1) $a \perp a$ тогда и только тогда, когда $a = 0$; 2) если $\{a_\delta\}$ — направленное вверх подмножество и $a_\delta \perp b$ для всех δ, то $\left(\sum a_\delta\right) \perp b$ и, кроме того, определено отношение эквивалентности $\backsim$, обладающее следующими свойствами: 1) если $a \backsim 0$, то $a = 0$; 2) если $a \backsim b_1 + b_2$ и $b_1 \perp b_2$, то существуют такие элементы a_1 и a_2, что $a = a_1 + a_2$, $a_1 \perp a_2$, $a_1 \backsim b_1$, $a_2 \backsim b_2$; 3) если $\{a_\alpha, \alpha \in I\}$ и $\{b_\alpha, \alpha \in I\}$ — $\perp$-независимые множества и $a_\alpha \backsim b_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, то $\sum a_\alpha \backsim \sum b_\alpha$. В непрерывной геометрии в качестве $\backsim$ можно взять перспективность.

§ 7. СТРУКТУРНЫЙ ИЗОМОРФИЗМ МОДУЛЕЙ НАД РЕГУЛЯРНЫМ КОЛЬЦОМ

26. Структурный изоморфизм модулей над регулярным кольцом. В связи с теоремой 10 естественно возникает вопрос о связи между регулярными кольцами, координатизирующими одну и ту же дедекиндову структуру с дополнениями. Теорема 2 показывает, что эти кольца не обязаны быть изоморфными. В полной общности поставленный вопрос остается открытым. Однако приводимые ниже теоремы решают его для непрерывных геометрий и дают существенное продвижение к окончательному решению.

Если R — кольцо с единицей, то положим $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ и $E_i = Re_i$. Если $\mathfrak{M}$ — левый R-модуль, то обозначим через $N(a)$ аннулятор элемента $a \in \mathfrak{M}$. Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется *свободным*, если $N(a) = 0$. *Полулинейным отображением* левого F-модуля $\mathfrak{M}$ на левый G-модуль $\mathfrak{N}$ называется пара, состоящая из изоморфизма σ кольца F на кольцо G и изоморфизма σ группы $\mathfrak{M}$ на группу $\mathfrak{N}$ [1]) таких, что $(\lambda a)^\sigma = \lambda^\sigma a^\sigma$ для любых $\lambda \in F$, $a \in \mathfrak{M}$. Ясно, что отображение $S \to \{s^\sigma;\ s \in S\}$ является изоморфизмом структуры подмодулей модуля $\mathfrak{M}$ на структуру подмодулей модуля $\mathfrak{N}$, причем подмодули конечного происхождения переходят в подмодули конечного происхождения. Будем говорить, что этот изоморфизм *индуцируется* полулинейным отображением σ.

Предложение 84. *Пусть $\mathfrak{M}$ — левый унитарный R-модуль* [2]), S, T, U, V, W — его подмодули, a, b, $c \in \mathfrak{M}$. *Тогда*:

а) *если a — свободный элемент из $\mathfrak{M}$ и $Ra \cap Rb = 0$, то $a + \xi b$ свободен при любом $\xi \in R$*;

б) *если $Ra \cap Rb = 0$, то $N(a) \subset N(b)$* и *$R(a-b) \cap Rb = 0$ — равносильные утверждения*;

в) *если $Ra \dotplus S = \mathfrak{M}$ и $Rb \leqslant S$*, то

$$Rb = [R(a-b) + Ra] \cap S;$$

г) *если система $\{Ra, Rb, Rc\}$ независима и $N(a) \subset N(b)$, то*

$$R(a-b-c) = [R(a-b) + Rc] \cap [R(a-c) + Rb];$$

д) *если $Ra \dotplus S = \mathfrak{M}$, $Rb + Rc \leqslant S$, $N(a) \subset N(c)$, то*

$$R(b-c) = [R(a-b) + R(a-c)] \cap S;$$

е) *если $Ra \dotplus T = W$, $S = S \cap T \dotplus U$, $T \dotplus V = W$ и $U \leqslant V$, то*

$$S = S \cap T + [P_{(V \to Ra;\ T)}(U) + T] \cap V.$$

---

[1]) Здесь различные по существу изоморфизмы (кольца F на G и группы $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$) обозначены одной буквой.

[2]) R-модуль $\mathfrak{M}$ называется *унитарным*, если R содержит единицу 1 и $1a = a$ для любого $a \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. а) Если $\lambda(a+\xi b)=0$, то $\lambda a = -\lambda\xi b \in Ra \cap Rb = 0$, откуда $\lambda = 0$.

б) Если $N(a) \subset N(b)$ и $x \in R(a-b) \cap Rb$, то $x = \lambda(a-b) = \mu b$. Отсюда $\lambda a = (\lambda+\mu) b \in Ra \cap Rb = 0$. Следовательно, $\lambda \in N(a) \subset N(b)$, т. е. $\lambda b = 0$, а значит, и $x = \lambda(a-b) = 0$. Если $R(a-b) \cap Rb = 0$ и $\lambda a = 0$, то $\lambda b = -\lambda(a-b) \in R(a-b) \cap Rb = 0$.

в) Пусть $T = [R(a-b)+Ra] \cap S$ и $x \in T$. Тогда $x = \lambda(a-b)+\mu a \in S$. Отсюда $(\lambda+\mu) a \in Ra \cap S = 0$, т. е. $x = -\lambda b \in Rb$. Таким образом, $T \leqslant Rb$. Так как обратное включение очевидно, то все доказано.

г) Пусть T — правая часть доказываемого соотношения. Ясно, что $R(a-b-c) \leqslant T$. Если $x \in T$, то

$$x = \lambda(a-b)+\mu c = \xi(a-c)+\eta b.$$

Отсюда

$$(\lambda-\xi) a = (\lambda+\eta) b = (\mu+\xi) c = 0.$$

Следовательно, $\lambda-\xi \in N(a) \subset N(b)$, а значит, $\eta b = -\lambda b = -\xi b$. Таким образом,

$$x = \xi(a-c)+\eta b = \xi(a-c-b) \in R(a-b-c),$$

т. е. $T \leqslant R(a-b-c)$.

д) Пусть T — правая часть доказываемого соотношения. Тогда $R(b-c) \leqslant T$. Если $x \in T$, то $x = \lambda(a-b) + \mu(a-c) \in S$. Отсюда $(\lambda+\mu) a \in Ra \cap S = 0$. Поэтому $\lambda+\mu \in N(a) \subset N(c)$, а значит, $\mu c = -\lambda c$. Следовательно,

$$x = -(\lambda b+\mu c) = -\lambda(b-c) \in R(b-c),$$

т. е. $T \leqslant R(b-c)$.

е) Легко видеть, что T является осью перспективы элементов Ra и V. Поэтому из предложения 7 вытекает

$$[P_{(V\to Ra;\, T)}(U)+T] \cap V = U,$$

чем и доказывается наше утверждение [1]).

Предложение 85. *Если $\mathfrak{M}$ — левый унитарный R-модуль, S, T* — его подмодули, *$a \in \mathfrak{M}$ и $S \dot{+} T = Ra \dot{+} T$, то существует такой элемент $t \in T$, что $S = R(a-t)$ и $N(a) \subset N(t)$. Если $a-t' \in S$ для некоторого $t' \in T$, то $t' = t$.*

---

[1]) Следует учесть, что предложение 7 справедливо в любой дедекиндовой структуре (см. стр. 14).

Доказательство. Так как $a \in Ra \subset S + T$, то $a = x + y$, где $x \in S$, $y \in T$. Но $S \subset Ra + T$. Поэтому $x = \lambda a - t$, где $\lambda \in R$, $t \in T$. Отсюда

$$(1 - \lambda) a = y - t \in Ra \cap T = 0,$$

т. е. $\lambda a = a$ и $x = a - t$. Если $s \in S$, то, как и выше, $s = \mu a + z$, где $\mu \in R$, $z \in T$. Поэтому

$$s - \mu x = z + \mu t \in S \cap T = 0,$$

т. е. $s = \mu (a - t)$ или $S = R (a - t)$. Если $\xi a = 0$, то $\xi t = -\xi (a - t) \in S \cap T = 0$. Если $a - t' \in S$, то

$$t - t' = (a - t') - (a - t) \in S \cap T = 0,$$

т. е. $t = t'$.

Предложение 86. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — левые унитарные модули над кольцами F и G соответственно, $\mathfrak{L}$ — подструктура структуры подмодулей модуля $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$ содержит модуль $\mathfrak{M}$ и все его подмодули конечного происхождения, последние обладают в $\mathfrak{L}$ дополнениями, $S \to S^*$ — изоморфизм структуры $\mathfrak{L}$ на подструктуру структуры подмодулей модуля $\mathfrak{N}$, $e \in \mathfrak{M}$, $(Fe)^* = Ge'$, $N(e) \subset N(a)$, $Fa \cap Fe = 0$. Тогда существует единственный элемент $a' = h(e, e', a) \in \mathfrak{N}$ такой, что $(Fa)^* = Ga'$ и $[F(e - a)]^* = G(e' - a')$. При этом:*

а) $N(e') \subset N(a')$;

б) *если* $N(e) = N(a)$, *то* $N(e') = N(a')$;

в) *если множество* $\{Fe, Fa, Fb\}$ *независимо*, $N(e) \subset N(a) \subset N(b)$, $b' = h(e, e', b)$, $b'' = h(a, a', b)$, *то* $b' = b''$;

г) *если* $N(e) = N(a)$ *и* $a' = h(e, e', a)$, *то* $e' = h(a, a', e)$;

д) *если* $\{Fe, Fa, Fb\}$ — *независимое множество и* $N(e) \subset N(a) \cap N(b)$, *то*

$$h(e, e', a + b) = h(e, e', a) + h(e, e', b).$$

Доказательство. Ввиду предложения 84, б),

$$F(e - a) \dot{+} Fa = Fe \dot{+} Fa,$$

а значит,

$$[F(e - a)]^* \dot{+} (Fa)^* = Ge' \dot{+} (Fa)^*.$$

Согласно предложению 85, $[F(e - a)]^* = G(e' - a')$, где $a' \in (Fa)^*$ и $N(e') \subset N(a')$. Пусть $Fe \dot{+} S = \mathfrak{M}$, причем $Fa \leqslant S$. Тогда $Ge' \dot{+} S^* = \mathfrak{N}$ и $Ga' \leqslant (Fa)^* \leqslant S^*$. Применяя предложение 84, в), будем иметь

$$(Fa)^* = ([F(e - a) + Fe] \cap S)^* = [G(e' - a') + Ge'] \cap S^* = Ga'.$$

Справедливость свойства б) сразу следует из предложения 84, б). Для доказательства единственности допустим, что $Ga'' = Ga' = (Fa)^*$ и $G(e' - a'') = G(e' - a')$. Тогда $a'' \in Ga'$ и $e' - a'' = \lambda(e' - a')$, где $\lambda \in G$. Отсюда

$$(\lambda - 1)e' = \lambda a' - a'' \in Ge' \cap Ga' = (Fe \cap Fa)^* = 0.$$

Значит, $\lambda - 1 \in N(e') \subset N(a')$, т. е. $\lambda a' = a'$ или $a' - a'' = \lambda a' - a'' = 0$. Если выполнены условия утверждения в), $Fe \dot{+} S = \mathfrak{M}$, $Fa + Fb \leqslant S$, то

$$Gb' = (Fb)^* = Gb'',$$

а из предложения 84, д) вытекает

$$G(b' - a') = [G(e' - b') + G(e' - a')] \cap S^* = \\ = ([F(e - b) + F(e - a)] \cap S)^* = [F(b - a)]^* = G(b'' - a').$$

Ввиду единственности $h(a, a', b)$, из полученных соотношений вытекает, что $b' = b''$.

Справедливость утверждения г) сразу следует из соотношений $(Fe)^* = Ge'$ и $[F(a - e)]^* = G(a' - e')$, если принять во внимание единственность элемента, подчиненного этим условиям. Если, наконец, выполнены условия утверждения д), то положим $a + b = c$, $h(e, e', a) = a'$, $h(e, e', b) = b'$, $h(e, e', c) = c'$. Применяя предложение 84, г), получим

$$G(e' - (a' + b')) = [G(e' - a') + Gb'] \cap [G(e' - b') + Ga'] = \\ = ([F(e - a) + Fb] \cap [F(e - b) + Fa])^* = \\ = [F(e - a - b)]^* = G(e' - c').$$

Если $Fe \dot{+} S = \mathfrak{M}$ и $Fa + Fb \leqslant S$, то, учитывая этот результат и предложение 84, в), будем иметь

$$G(a' + b') = [G(e' - (a' + b')) + Ge'] \cap S^* = \\ = ([F(e - c) + Fe] \cap S)^* = (Fc)^* = Gc'.$$

В силу единственности $h(e, e', c)$; эти соотношения показывают, что $c' = a' + b'$.

Теорема 20. *Пусть F и G — регулярные кольца, $S \to S^*$ — изоморфизм $\mathfrak{L}(F^n)$ на $\mathfrak{L}(G^m)$ (используются обозначения теоремы 4), $n \geqslant 3$, $E_1^* = Ge'$, $G(1 - \varepsilon) =$*

$=N(e')$[1]), *где* $\varepsilon^2=\varepsilon$, $H=\varepsilon G\varepsilon$. *Тогда в* G^m *найдутся такие элементы* $e'_1, \ldots, e'_n$, *что* $N(e'_i)=N(e')$ *и* $E_i^*=Ge'_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, *а также такое полулинейное отображение* σ F*-модуля* F^n *на* H*-модуль* $\sum He'_i$, *что* $(Fx)^*=Gx^\sigma$ *для каждого* $x\in F^n$[2]).

Доказательство. Положим

$$x^\sigma=h(e, e', x), \quad \text{если } x\in E_i, \quad i\neq 1.$$

Ввиду предложения 84, б), $N(e_i)=N(e_1)$ для всех i. Поэтому можно положить

$$x^\sigma=h\left(e_2, e_2^\sigma, x\right), \quad \text{если} \quad x\in E_1.$$

Если $x=\sum x_i$, где $x_i\in E_i$, то положим

$$x^\sigma=\sum x_i^\sigma.$$

Ввиду свойства г) предложения 86, $e_1^\sigma=e'$. Если положить $e'_i=e_i^\sigma$, $i=1, \ldots, n$, то, согласно предложению 86, б),

$$N\left(e'_i\right)=N(e'). \tag{95}$$

Ясно также, что $E_i^*=Ge'_i$. Если $x\in E_i$, то из (95) и предложения 86 следует

$$N(e')\subset N(x^\sigma) \tag{96}$$

и

$$(Fx)^*=Gx^\sigma. \tag{97}$$

а) *Если* $x\in E_i$ *и* $j\neq i$, *то* $[F(e_j-x)]^*=G\left(e'_j-x^\sigma\right)$.

Если $j=1$ или $i=1$, $j=2$, то справедливость а) вытекает из предложения 86. Если $i=1$, а $j\geqslant 3$, из свойства в) предложения 86 следует $e'_j=h\left(e_2, e'_2, e_j\right)$ и $x^\sigma=$ $=h\left(e_j, e'_j, x\right)$, что, в силу предложения 86, влечет справедливость а). Если i, $j\neq 1$, то, применяя свойство в) предложения 86, опять получим $x^\sigma=h\left(e_j, e'_j, x\right)$, откуда, как и выше, вытекает а).

---

[1]) Если $e'=(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, где $\xi_i\in G$, то, ввиду теоремы 1 и предложений 13, е) и 13, б), для подходящего идемпотента $\varepsilon\in G$ имеет место

$$N(e')=\bigcap_{i=1}^{m}(\xi_i G)^l=\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i G\right)^l=(\varepsilon G)^l=G(1-\varepsilon).$$

[2]) Скорняков (1).

б) *Если* $x \in E_i + E_j$, *то* $(Fx)^* = Gx^\sigma$.

Пусть $x = y + z$, где $y \in E_i$, $z \in E_j$, $k \neq i, j$. Учитывая свойства г) и д) предложения 86, получим $h\left(e_k, e'_k, x\right) = y^\sigma + z^\sigma$, откуда и следует б).

в) *Отображение* $x \to x^\sigma$ *является изоморфизмом группы* F^n *на группу* $\Gamma = \left\{\sum y_i;\ y_i \in Ge'_i,\ N(e') \subset N(y_i)\right\}$.

Очевидно, достаточно установить, что $x \to x^\sigma$ — изоморфизм E_i на $\Gamma \cap Ge'_i$ для всякого i. Пусть $x, y \in E_i$,

$$j = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq 1, \\ 2, & \text{если } i = 1, \end{cases}$$

и $k \neq i, j$. Тогда из свойства д) предложения 86 вытекает

$$(x+y)^\sigma + h\left(e_j, e'_j, e_k\right) = h\left(e_j, e'_j, x+y\right) + h\left(e_j, e'_j, e_k\right) =$$
$$= h\left(e_j, e'_j, x+y+e_k\right) = h\left(e_j, e'_j, x+e_k\right) + h\left(e_j, e'_j, y\right) =$$
$$= h\left(e_j, e'_j, e_k\right) + x^\sigma + y^\sigma.$$

Следовательно, $(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$. Если $x^\sigma = 0$, то, согласно а), $\left[F\left(e_j - x\right)\right]^* = Ge'_j = \left(Fe_j\right)^*$. Следовательно, $F\left(e_j - x\right) = Fe_j$, т. е. $e_j - x = \lambda e_j$. Отсюда

$$x = (1 - \lambda)\, e_j \in E_i \cap E_j = 0.$$

Пусть, наконец, $y \in \Gamma \cap Ge'_i$. Если $\lambda\left(e'_j - y\right) = \mu e'_i$, то $\lambda e'_j = \mu e'_i + \lambda y \in \left(E_i \cap E_j\right)^* = 0$. Поэтому $\lambda \in N\left(e'_j\right) = N(e') \subset N(y)$, откуда $\lambda\left(e'_j - y\right) = 0$. Следовательно,

$$G\left(e'_j - y\right) \dot{+} Ge'_i = Ge'_i + Ge'_j.$$

Но тогда $G\left(e'_j - y\right) = T^*$, где T — дополнение элемента E_i в $E_i + E_j$. Ввиду предложения 85, для некоторого $x \in E_i$ имеем

$$G\left(e'_j - y\right) = T^* = \left[F\left(e_j - x\right)\right]^* = G\left(e'_j - x^\sigma\right).$$

Вторичное применение предложения 85 приводит к $y = x^\sigma$.

г) $Ge'_i = G\varepsilon e'_i$.

Ясно, что $G\varepsilon e'_i \subset Ge'_i$. Если $y \in Ge'_i$, то $y = \lambda e'_i$, где $\lambda \in G$. Но $\lambda = \xi + \eta$, где $\xi \in G\varepsilon$, $\eta \in G(1 - \varepsilon)$. Учитывая (95), получим $y = \xi e'_i \in G\varepsilon e'_i$.

д) *Если* $\xi, \eta \in G\varepsilon$ *и* $\xi e'_i = \eta e'_i$, *то* $\xi = \eta$.

Действительно, ввиду (95), $\xi - \eta \in G\varepsilon \cap N(e') = 0$.

Ввиду г) и д), условие $(\lambda e_1)^\sigma = \lambda^\sigma e_1^\sigma$ определяет однозначное отображение $\lambda \to \lambda^\sigma$ кольца F в кольцо $G\varepsilon$.

е) *Если* $a \in F^n$ и $\lambda \in F$, *то* $(\lambda a)^\sigma = \lambda^\sigma a^\sigma$.

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $a \in E_i$. Если $i \neq 1$, то, ввиду а) и б),

$$\lambda^\sigma e_1^\sigma - (\lambda a)^\sigma = [\lambda(e_1 - a)]^\sigma \in G[\lambda(e_1 - a)]^\sigma =$$
$$= [F\lambda(e_1 - a)]^* \subset [F(e_1 - a)]^* = G(e_1^\sigma - a^\sigma).$$

Отсюда

$$\lambda^\sigma e_1^\sigma - (\lambda a)^\sigma = \mu e_1^\sigma - \mu a^\sigma,$$

где $\mu \in G$. Следовательно,

$$(\lambda^\sigma - \mu) e_1^\sigma = (\lambda a)^\sigma - \mu a^\sigma \in (E_1 \cap E_i)^* = 0.$$

Но из (95) и (96) вытекает, что $\lambda^\sigma - \mu \in N(e') \subset N(a^\sigma)$. Поэтому $(\lambda a)^\sigma = \mu a^\sigma = \lambda^\sigma a^\sigma$. Если же $i = 1$, то можно провести то же рассуждение, исходя из соотношения

$$\lambda^\sigma e_2^\sigma - (\lambda a)^\sigma \in G(e_2^\sigma - a^\sigma).$$

ж) *Отображение* $\lambda \to \lambda^\sigma$ *является изоморфизмом кольца* F *на кольцо* H.

Действительно, по определению, для любого $\lambda \in F$ имеем $\lambda^\sigma e' = (\lambda e_1)^\sigma$. Поэтому из в) вытекает $(1 - \varepsilon)\lambda^\sigma e' = 0$. Поскольку $\lambda^\sigma \in G\varepsilon$, то

$$(1 - \varepsilon)\lambda^\sigma \in N(e') \cap G\varepsilon = G(1 - \varepsilon) \cap G\varepsilon = 0,$$

т. е. $\lambda^\sigma \in \varepsilon G \varepsilon = H$. Если, далее, $\lambda, \mu \in F$, то, используя в) и е), получим

$$(\lambda + \mu)^\sigma e' = [(\lambda + \mu) e]^\sigma = (\lambda e + \mu e)^\sigma = \lambda^\sigma e' + \mu^\sigma e' = (\lambda^\sigma + \mu^\sigma) e'$$

и

$$(\lambda\mu)^\sigma e' = (\lambda\mu e)^\sigma = \lambda^\sigma (\mu e)^\sigma = \lambda^\sigma \mu^\sigma e'.$$

Отсюда, ввиду д), следует, что $(\lambda + \mu)^\sigma = \lambda^\sigma + \mu^\sigma$ и $(\lambda\mu)^\sigma = \lambda^\sigma \mu^\sigma$. Если $\xi \in H$, то $\xi e' \in \Gamma$. Согласно в), $\xi e' = x^\sigma$, где $x \in F^n$. Ввиду в), (97) и е), отсюда следует, что $\xi e' = (\lambda e)^\sigma = \lambda^\sigma e'$. Применяя д), приходим к $\xi = \lambda^\sigma$. При этом, если $\xi = 0$, то $\lambda e = 0$, т. е. $\lambda = 0$.

з) *Для всякого* $\lambda \in G\varepsilon$ *найдется такой элемент* $\mu \in H$, *что* $G\lambda = G\mu$.

Так как $S^* = G\lambda e' \leqslant Ge' = (Fe)^*$, то $S \leqslant Fe$. Ввиду теоремы 1, $S = \sum F\xi_i e = F\delta e$. Ввиду ж), $\mu = \delta^\sigma \in H$. Согласно (97) и е), $G\lambda e' = S^* = G(\delta e)^\sigma = G\mu e'$. что, ввиду д), дает $G\lambda = G\mu$.

и) $(Fx)^* = Gx^\sigma$.

Пусть $x = \sum_1^n \xi_i e_i$. Число отличных от нуля коэффициентов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ назовем *длиной элемента* x. Если длина x равна 1 или 2, то и) вытекает из (97) и б). Допустим, что и) доказано для элементов длиною меньше k и $x = \sum_{s=1}^k x_{i_s}$, где $i_1, \ldots, i_s$ все различны, а $x_i \in E_{i_s}$. Положим $T = \sum_{s=1}^{k-1} E_{i_s}$. Тогда $T^* = \sum_{s=1}^{k-1} E^*_{i_s}$. Покажем, что

$$(Fx \cap T)^* = Gx^\sigma \cap T^*. \tag{98}$$

В самом деле, если $y \in Fx \cap T$, то $y = \xi x$, где $\xi x_{i_k} = 0$. Ввиду е), $y^\sigma = \xi^\sigma x^\sigma$, где $\xi^\sigma x^\sigma_{i_k} = (\xi x_{i_k})^\sigma = 0$. Поэтому, воспользовавшись индуктивным предположением, будем иметь

$$(Fy)^* = Gy^\sigma \in Gx^\sigma \cap T^*.$$

Поскольку $Fx \cap T$ имеет конечное происхождение, отсюда следует, что

$$(Fx \cap T)^* \leqslant Gx^\sigma \cap T^*.$$

Пусть теперь $y \in Gx^\sigma \cap T^*$. Тогда $y = \lambda x^\sigma$, где $\lambda x^\sigma_{i_k} = 0$. Ввиду в), $\lambda\varepsilon x^\sigma_{i_k} = [\lambda\varepsilon + \lambda(1-\varepsilon)] x^\sigma_{i_k} = \lambda x^\sigma_{i_k} = 0$. Согласно з), имеет место $\lambda\varepsilon = \nu\mu$ и $\mu = \gamma\lambda\varepsilon$, где $\mu \in H$, $\nu, \gamma \in G$. Из ж) вытекает, что $\mu = \xi^\sigma$ для некоторого $\xi \in F$. В силу е),

$$(\xi x_{i_k})^\sigma = \mu x^\sigma_{i_k} = \gamma\lambda\varepsilon x^\sigma_{i_k} = 0.$$

Следовательно, $\xi x \in Fx \cap T$. Применяя в), е) и индуктивное предположение, будем иметь

$$Gy = G\lambda x^\sigma = G\lambda\varepsilon x^\sigma \leqslant G\mu x^\sigma = G(\xi x)^\sigma = (F\xi x)^* \leqslant (Fx \cap T)^*.$$

Это доказывает включение $Gx^\sigma \cap T^* \leqslant (Fx \cap T)^*$, а значит, и (98). Пусть теперь $W = \sum_1^k E_{i_s}$, $Fx \cap T \dotplus U = Fx$, $T \dotplus V = W$ и $U \leqslant V$ (такое V существует, ибо $U \cap T = U \cap (Fx \cap T) = 0$). Тогда

$$(Fx \cap T)^* + U^* = (Fx)^*, \quad T^* + V^* = W^* \quad \text{и} \quad U^* \leqslant V^*.$$

Ввиду (98) и предложения 84, е),

$$(Fx)^* = \left(Fx \cap T + \left[P_{V \to E_{i_k}}(U) + T\right] \cap V\right)^* =$$
$$= Gx^\sigma \cap T^* + \left[P_{V^* \to E^*_{i_k}}(U^*) + T^*\right] \cap V^* = Gx^\sigma.$$

Теорема 20 является непосредственным следствием в), ж), е) и и).

Теорема 21. *Если F и G — регулярные кольца, $\mathfrak{L}(F)$ обладает однородным базисом ранга $n \geqslant 3$ и θ — изоморфизм $\mathfrak{L}(F)$ на $\mathfrak{L}(G)$, то существует один и только один изоморфизм σ кольца F на кольцо G такой, что $(F\alpha)^\theta = G\alpha^\sigma$* [1]. *$\mathfrak{L}(F)$ — структура главных левых идеалов кольца F.*

Лемма. *Если $R\varepsilon_1, \ldots, R\varepsilon_n$ — однородный базис структуры $\mathfrak{L}(R)$, где R — некоторое регулярное кольцо, $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ при $i \neq j$, $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 1$, то существует такой изоморфизм $\alpha \to \alpha'$ кольца R на кольцо $(\varepsilon_1 R \varepsilon_1)_n$, что*

$$\varepsilon_1 \to \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как $R\varepsilon_1 \sim R\varepsilon_i$, то предложение 13, ж) позволяет найти такие $\alpha_i \in \varepsilon_1 R \varepsilon_i$ и $\beta_i \in \varepsilon_i R \varepsilon_1$, $i \neq 1$, что

$$R(\varepsilon_1 - \alpha_i) = R(\varepsilon_i - \beta_i), \qquad \varepsilon_1 = \alpha_i\beta_i \quad \text{и} \quad \varepsilon_i = \beta_i\alpha_i.$$

Последние два соотношения остаются справедливыми и для $i = 1$, если положить $\alpha_1 = \beta_1 = \varepsilon_1$. Если $\xi \in R$, то положим $\xi_{ij} = \alpha_i\xi\beta_j$ и покажем, что отображение $\xi \to (\xi_{ij})$ является изоморфизмом R на $(\varepsilon_1 R \varepsilon_1)_n$.

В самом деле, ясно, что $\xi + \eta \to (\xi_{ij}) + (\eta_{ij})$.

Если $\zeta = \xi\eta$ и χ — элемент матрицы $(\xi_{ij})(\eta_{ij})$, стоящий в i-й строке и j-м столбце, то

$$\chi = \sum_k \xi_{ik}\eta_{kj} = \sum_k \alpha_i\xi\beta_k\alpha_k\eta\beta_j = \sum_k \alpha_i\xi\varepsilon_k\eta\beta_j = \alpha_i\xi\eta\beta_j = \zeta_{ij}.$$

Если $(\xi_{ij}) = 0$, то

$$\xi = \sum_{i,j} \varepsilon_i\xi\varepsilon_j = \sum_{i,j} \beta_i\alpha_i\xi\beta_j\alpha_j = \sum_{i,j} \beta_i\xi_{ij}\alpha_j = 0.$$

---

[1]) Neumann [6]. См. также Jónsson [2].

Если, далее, $(\xi_{ij}) \in (\varepsilon_1 R \varepsilon_1)_n$, то

$$\left(\sum_{k,l} \beta_k \xi_{kl} \alpha_l\right)_{ij} = \sum_{k,l} \alpha_i \beta_k \xi_{kl} \alpha_l \beta_j = \alpha_i \beta_i \xi_{ij} \alpha_j \beta_j = \varepsilon_1 \xi_{ij} \varepsilon_1 = \xi_{ij},$$

т. е.

$$\sum_{k,l} \beta_k \xi_{kl} \alpha_l \to (\xi_{ij}).$$

Наконец,

$$(\varepsilon_1)_{ij} = \alpha_i \varepsilon_1 \beta_j = \alpha_i \varepsilon_i \varepsilon_1 \varepsilon_j \beta_j = \begin{cases} \varepsilon_1, & \text{если } i = j = 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. образ ε_1 совпадает с требуемым.

Приступая к доказательству теоремы, условимся символом α: $A \to B$ заменять слова: «α — изоморфизм A на B». Если α: $A \to B$, где A — кольцо, то изоморфизм $\mathfrak{L}(A)$ на $\mathfrak{L}(B)$, который индуцирует α, будем обозначать той же буквой. Пусть, далее, $F\varepsilon_1, \ldots, F\varepsilon_n$ — однородный базис структуры $\mathfrak{L}(F)$ и $(F\varepsilon_i)^\theta = G\delta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ввиду предложения 13, а) и леммы, можно считать ε_1 и δ_1 идемпотентами, а также найти изоморфизм

$$\chi: \quad F \to (\varepsilon_1 F \varepsilon_1)_n$$

и

$$\chi^*: \quad G \to (\delta_1 G \delta_1)_n,$$

обладающие указанными в лемме свойствами. Пусть, наконец,

$$\psi: \quad \mathfrak{L}[(\varepsilon_1 F \varepsilon_1)_n] \to \mathfrak{L}[(\varepsilon_1 F \varepsilon_1)^n]$$

и

$$\psi^*: \quad \mathfrak{L}[(\delta_1 F \delta_1)_n] \to \mathfrak{L}[(\delta_1 F \delta_1)^n] \text{ —}$$

изоморфизмы, указанные в предложении 14. Тогда

$$\Phi = \psi^{-1} \chi^{-1} \theta \chi^* \psi^*: \quad \mathfrak{L}[(\varepsilon_1 F \varepsilon_1)^n] \to \mathfrak{L}[(\delta_1 G \delta_1)^n].$$

Элемент $[(\varepsilon_1 F \varepsilon_1) e_1]^\Phi$ определяется цепочкой

$$(\varepsilon_1 F \varepsilon_1) e_1 \to (\varepsilon_1 F \varepsilon_1)_n \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \to F\varepsilon_1 \to$$

$$\to G\delta_1 \to (\delta_1 G \delta_1)_n \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \to (\delta_1 G \delta_1) e_1.$$

Так как e_1 — свободный элемент модуля $(\delta_1 G\delta_1)^n$, то, согласно теореме 20, Φ индуцируется полулинейным отображением ω.

Пусть $\Delta: \quad (\varepsilon_1 F\varepsilon_1)_n \to (\delta_1 G\delta_1)_n$, индуцируемый изоморфизмом $\omega: \quad \varepsilon_1 F\varepsilon_1 \to \delta_1 G\delta_1$. Положим

$$\sigma = \chi\Delta\chi^{*^{-1}}: \qquad F \to G.$$

Если $M \in \mathfrak{L}[(\varepsilon_1 F\varepsilon_1)^n]$, то $M\psi^{-1}$ — множество матриц, строками которых служат строки, принадлежащие M, а $M\psi^{-1}\Delta$ — множество матриц, строками которых служат строки из M^ω. Поэтому $M\psi^{-1}\Delta\psi^* = M^\omega$, т. е. $\Phi = \psi^{-1}\Delta\psi^*$, откуда $\Delta = \psi\Phi\psi^{*-1}$. Отсюда

$$\sigma = \chi\Delta\chi^{*^{-1}} = \chi\psi\Phi\psi^{*^{-1}}\chi^{*^{-1}} = \theta,$$

что и требовалось.

Единственность искомого изоморфизма сразу следует из следующего утверждения:

Если τ — автоморфизм кольца F и $F\alpha^\tau = F\alpha$ для всех $\alpha \in F$, то $\alpha = \alpha^\tau$ для всех $\alpha \in F$.

Для доказательства вспомним, что $\mathfrak{L}(F)$ допускает однородный базис $\{F\varepsilon_1, \ldots, F\varepsilon_n\}$, где $n \geqslant 3$. Ввиду предложения 13, а), можно считать, что $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ при $i \neq j$, $\sum\limits_1^n \varepsilon_i = 1$. Дальнейшие рассмотрения расчленим на несколько утверждений.

а) *Если $\alpha^2 = \alpha$, то $\alpha = \alpha^\tau$.*

Так как $(\alpha^\tau)^2 = \alpha^\tau$, $F\alpha = F\alpha^\tau$ и $F(1 - \alpha) = F(1 - \alpha^\tau)$, то а) вытекает из единственности системы идемпотентов, указанных в предложении 13, а).

б) *Если $\alpha \in \varepsilon_i F\varepsilon_j$, где $i \neq j$, то $\alpha = \alpha^\tau$.*

Ввиду а), $F(\varepsilon_i - \alpha^\tau) = F(\varepsilon_i - \alpha)$ и $\alpha^\tau \in \varepsilon_i F\varepsilon_j$. Но тогда б) вытекает из предложения 13, д).

в) *Если $\alpha \in \varepsilon_i F\varepsilon_i$, то $\alpha = \alpha^\tau$.*

Выберем $j \neq i$. Согласно предложению 13, ж), найдутся такие $\xi \in \varepsilon_i F\varepsilon_j$ и $\eta \in \varepsilon_j F\varepsilon_i$, что $\varepsilon_i = \xi\eta$. Так как $\alpha\xi \in \varepsilon_i F\varepsilon_j$ и $\eta \in \varepsilon_j F\varepsilon_i$, то, учитывая б), будем иметь

$$\alpha^\tau = (\alpha\varepsilon_i)^\tau = (\alpha\xi\eta)^\tau = (\alpha\xi)^\tau\,\eta^\tau = \alpha\xi\eta = \alpha\varepsilon_i = \alpha.$$

г) $\alpha = \alpha^\tau$.

Ввиду б) и в),

$$\alpha^\tau = \sum_{i,j} (\varepsilon_i\alpha\varepsilon_j)^\tau = \sum_{i,j} \varepsilon_i\alpha\varepsilon_j = \alpha.$$

Теорема 22. *Если F и G — регулярные кольца, причем $n \geqslant 3$, а $\mathfrak{L}(F^n)$ — непрерывная геометрия, то всякий изоморфизм $S \to S^*$ структуры $\mathfrak{L}(F^n)$ на структуру $\mathfrak{L}(G^n)$ индуцируется полулинейным отображением* [1]).

Доказательство. Ввиду предложения 81, $(Fe_1)^* \sim Ge_1$. Если T — ось соответствующей перспективы, то, согласно предложению 85, $(Fe_1)^* = G(e_1 - t)$, где $t \in T$. Если $\xi(e_1 - t) = 0$, то $\xi e_1 = \xi t \in Ge_1 \cap T = 0$. Отсюда $N(e_1 - t) = 0$, и теорема 22 вытекает из теоремы 20.

Теорема 23. *Пусть F и G — регулярные кольца, $\mathfrak{L}(F^m)$ — непрерывная геометрия, θ — изоморфизм $\mathfrak{L}(F^m)$ на $\mathfrak{L}(F^n)$, $3 \leqslant m < n$. Тогда найдутся такие кольца H и K, что H_s изоморфно F, K_t изоморфно G и θ индуцируется полулинейным отображением H^{sm} на K^{tn}* [1]).

Для доказательства условимся обозначать через ka сумму независимой системы, состоящей из k элементов, перспективных $a \in \mathfrak{L}(F^m)$. Из теоремы 17 и предложения 72, д) вытекает, что все такие суммы перспективны между собой.

Лемма. *Если $ma = nb = 1$ и $m < n$, то найдется такой элемент $d \in \mathfrak{L}(F^m)$, что $sd \sim a$ и $td \sim b$ для подходящих натуральных чисел s и t.*

Доказательство. Пусть $d_1 = a$, $d_2 = b$, $m_1 = n$. Ввиду предложения 81, $a \succsim b$. Допустим, что построены элементы $d_1 \succsim d_2 \succsim \ldots \succsim d_r$ и найдены числа $q_1, \ldots, q_{r-1}$ и $m_1 > m_2 > \ldots > m_{r-1}$ такие, что

$$d_{k-1} \sim q_k d_k \dotplus d_{k+1} \tag{99}$$

и

$$m_{k-1} d_{k+1} \sim m_k d_k. \tag{100}$$

Если $d_r \neq 0$, то теорема 17 и предложение 80 позволяют найти в $L_{d_{r-1}}$ конечную максимальную независимую систему элементов, перспективных d_r. Если эта система состоит из q_r элементов, то $d_{r-1} = q_r d_r \dotplus d_{r+1}$, где d_{r+1} не содержит элементов, перспективных d_r. Ввиду теоремы 17, предложений 4 и 72, д) и соотношения (100),

$$m_{r-2} d_r \sim m_{r-1} d_{r-1} \sim m_{r-1} q_r d_r \dotplus m_{r-1} d_{r+1}.$$

Применяя предложение 72, г), получим $m_r d_r \sim m_{r-1} d_{r+1}$, где $m_r = m_{r-2} - m_{r-1} q_r$. Если $m_r \geqslant m_{r-1}$, то из предложений 7 и 81 следует, что $d_r \precsim d_{r+1}$ вопреки выбору d_{r+1}. Таким

---

[1]) Скорняков [1].

образом, $m_r < m_{r-1}$, а значит, $d_r \succ d_{r+1}$. Так как последовательность $m_1, m_2, \ldots$ строго убывает, то для некоторого u имеет место $d_{u+1}=0$. Отсюда, ввиду (99), $d_{u-1} \sim q_u d_u$. Еще раз применяя (99), предложения 4 и 72, д) и теорему 17, будем иметь

$$d_{u-2} \sim q_{u-1}d_{u-1} \dot{+} d_u \sim q_{u-1}q_u d_u \dot{+} d_u \sim (q_{u-1}q_u + 1) d_u.$$

Продолжая этот процесс, убедимся, что $d = d_u$ удовлетворяет заключению леммы.

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что $m(Fe_1) = 1 = n(Ge_1)^{\theta^{-1}}$. Ввиду леммы, для подходящего $d \in \mathfrak{L}(F^m)$ имеет место $Fe_1 \sim sd$ и $Ge_1 \sim td^{\theta}$. Применяя теорему 17 и предложения 4, 7, 72, д) и 59, д), получаем $smd = 1$ и $tnd^{\theta} = 1$. Таким образом, как $\mathfrak{L}(F^m)$, так и $\mathfrak{L}(G^n)$ допускают однородный базис ранга $sm = tn$. Ввиду теоремы 10, можно считать, что $\mathfrak{L}(F^m) = \mathfrak{L}(H^{sm})$, а $\mathfrak{L}(G^n) = \mathfrak{L}(K^{tn})$ для подходящих регулярных колец H и K. Применение теоремы 22 показывает, что θ индуцируется полулинейным отображением H^{sm} на K^{tn}. Ввиду теоремы 2, имеем цепочку изморфных отображений:

$$\mathfrak{L}(F^m) \to \mathfrak{L}(H^{sm}) \to \mathfrak{L}((H_s)_m) \to \mathfrak{L}(H_s^m).$$

Но тогда из теоремы 22 вытекает изоморфизм колец F и H_s. Изоморфизм колец G и K_t проверяется аналогично.

§ 8. $*$-РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА

27. Проекции. Регулярное кольцо R называется *$*$-регулярным*, если существует инволюционный антиавтоморфизм $\alpha \to \alpha^*$ этого кольца на себя такой, что $\alpha\alpha^* = 0$ возможно лишь при $\alpha = 0$. Элемент $\alpha \in R$, для которого $\alpha = \alpha^*$, называется *самосопряженным*. Самосопряженный идемпотент носит название *проекции*. Идемпотенты ε и δ называются эквивалентными (в обозначениях $\varepsilon \infty \delta$), если существуют такие элементы $\xi \in \varepsilon R \delta$ и $\eta \in \delta R \varepsilon$, что $\xi\eta = \varepsilon$, а $\eta\xi = \delta$.

Предложение 87. а) *Соотношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно*;

б) *если* $\alpha\xi\alpha = \alpha$, *то* $\alpha\xi \infty \xi\alpha$;

в) *если* $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\delta^2 = \delta$, $R\varepsilon = R\delta$, *то* $\varepsilon \infty \delta$;

г) *если* $\varepsilon \infty 0$, *то* $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Симметричность эквивалентности очевидна. Чтобы проверить справедливость соотношения $\varepsilon \infty \varepsilon$, достаточно взять в качестве ξ и η элемент ε. Если $\varepsilon \infty \delta$

и $\delta \infty \sigma$, то справедливы соотношения

$$\xi = \varepsilon\alpha\delta,\ \eta = \delta\beta\varepsilon,\ \varepsilon = \xi\eta,\ \delta = \eta\xi,\ \zeta = \delta\gamma\sigma,\ \chi = \sigma\lambda\delta,$$

$$\delta = \zeta\chi,\ \sigma = \chi\zeta.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \xi\eta\xi\eta = \xi\,\delta\eta = (\xi\zeta)(\chi\eta)$$

и

$$\sigma = \chi\zeta\chi\zeta = \chi\,\delta\zeta = (\chi\eta)(\xi\eta).$$

Так как $\xi\zeta = \varepsilon(\alpha\delta\gamma)\sigma \in \varepsilon R\sigma$, а $\chi\eta = \sigma(\lambda\delta\beta)\varepsilon \in \sigma R\varepsilon$, то $\varepsilon \infty \delta$. Для доказательства утверждения б) достаточно сопоставить соотношения $\alpha\xi = \alpha(\xi\alpha\xi)$, $\xi\alpha = (\xi\alpha\xi)\alpha$,

$$\alpha = \alpha\xi\alpha = \alpha\xi\alpha\xi\alpha \in (\alpha\xi)R(\xi\alpha) \quad \text{и} \quad \xi\alpha\xi = \xi\alpha\xi\alpha\xi \in (\xi\alpha)R(\alpha\xi).$$

Справедливость утверждения в) вытекает из соотношений: $\varepsilon = \varepsilon\delta$, $\delta = \delta\varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon 1\delta \in \varepsilon R\delta$, $\delta = \delta 1\varepsilon \in \delta R\varepsilon$. Справедливость г) — из $\varepsilon = \xi\eta = \xi 0\eta = 0$.

Предложение 88. *Левый* [*правый*] *идеал* $R\alpha$ [αR] *порождается однозначно определенной проекцией* $\Pi_l\alpha$ [$\Pi_r\alpha$].

Доказательство проведем для левого идеала.

Если $\xi \in (\alpha\alpha^*R)^l$ [1]), то $(\xi\alpha)(\xi\alpha)^* = \xi\alpha\alpha^*\xi^* = 0$, откуда $\xi\alpha = 0$. Если $\eta \in \alpha R$, то $\xi\eta = \xi\alpha\eta' = 0$, т. е. $\xi \in (\alpha R)^l$. Таким образом, $(\alpha\alpha^*R)^l \subset (\alpha R)^l$. Применяя теорему 1, найдем такой идемпотент δ, что $\alpha\alpha^*R = \delta R$. Тогда $1 - \delta \in (\alpha\alpha^*R)^l \subset (\alpha R)^l$. Отсюда $(1-\delta)\alpha = 0$, т. е. $\alpha = \delta\alpha \subset \delta R$, а значит, $\alpha = \alpha\alpha^*\beta$ для некоторого $\beta \in R$. Положим $\varepsilon = \alpha^*\beta$. Тогда

$$\varepsilon^* = \beta^*\alpha = \beta^*\alpha\alpha^*\beta = (\alpha^*\beta)^*\alpha^*\beta = \varepsilon^*\varepsilon,$$

откуда

$$\varepsilon = \varepsilon^{**} = (\varepsilon^*\varepsilon)^* = \varepsilon^*\varepsilon = \varepsilon^*$$

и $\varepsilon^2 = \varepsilon^*\varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon$. Так как $\alpha = \alpha\varepsilon$, то $R\alpha \subset R\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon = \varepsilon^* = (\alpha^*\beta)^* = \beta^*\alpha$, то $R\varepsilon \subset R\alpha$. Таким образом, $R\alpha = R\varepsilon$. Если для некоторой проекции σ имеет место $R\sigma = R\varepsilon$, то $\sigma = \sigma^* = (\sigma\varepsilon)^* = \varepsilon\sigma = \varepsilon$.

Проекции $\Pi_l\alpha$ и $\Pi_r\alpha$, указанные в предложении 88, назовем *левой* и *правой проекциями* элемента α. Вместо того, чтобы говорить о структуре главных идеалов $*$-регулярного кольца R, можно говорить о структуре его проекций. Если ε и δ — проекции $*$-регулярного кольца R, то условимся обозначать через $\varepsilon \cup \delta$ и $\varepsilon \cap \delta$ проекции, определяющие идеалы $R\varepsilon + R\delta$ и $R\varepsilon \cap R\delta$ соответственно. Тогда $\varepsilon \leqslant \delta$ означает, что $R\varepsilon \subset R\delta$.

---

[1]) Если $M \subset R$, то $M^l = \{\xi;\ \xi\alpha = 0$ для всех $\alpha \in M\}$, а $M^r = \{\xi;\ \alpha\xi = 0$ для всех $\alpha \in M\}$.

Предложение 89. *Если* α — *элемент* $*$-*регулярного кольца* R, *то*:

а) $\Pi_r\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot \Pi_l\alpha = \alpha$;

б) $\alpha^l = R(1 - \Pi_r\alpha)$;

в) $\alpha^r = (1 - \Pi_l\alpha)R$;

г) $\Pi_r\alpha \sim \Pi_l\alpha$;

д) *если* $\alpha^2 = \alpha$, *то* $\alpha \sim \Pi_l\alpha$;

е) *если* ε *и* δ — *проекции, то* $R\varepsilon \subset R\delta$ *равносильно* $\varepsilon R \subset \delta R$;

ж) *отображение* $\varepsilon \to 1 - \varepsilon$ *является антиавтоморфизмом структуры проекций* [1]).

з) *если* ε — *проекция*, $\alpha^2 = \alpha$ *и* $R\alpha \subset R\varepsilon$, *то* $\Pi_r(\varepsilon - \varepsilon\alpha) = \varepsilon - \Pi_l\alpha$.

Доказательство. Справедливость свойства а) очевидна. Свойства б) и в) вытекают из предложения 13, б).

Пусть, далее, $\Pi_r\alpha = \alpha\xi$ и $\Pi_l\alpha = \eta\alpha$. Учитывая а), получим $\Pi_r\alpha = \alpha(\eta\alpha\xi)$ и $\Pi_l\alpha = (\eta\alpha\xi)\alpha$. Поскольку

$$\alpha = \alpha\xi\alpha = \Pi_r\alpha \cdot \alpha\xi\alpha \cdot \Pi_l\alpha \in \Pi_r\alpha \cdot R \cdot \Pi_l\alpha$$

и

$$\eta\alpha\xi = (\eta\alpha)\,\xi\,(\alpha\xi) = \Pi_l\alpha \cdot \xi \cdot \Pi_r\alpha \in \Pi_l\alpha \cdot R \cdot \Pi_r\alpha,$$

то $\Pi_r\alpha \sim \Pi_l\alpha$.

Справедливость д) вытекает из предложения 87, в).

Если $R\varepsilon \subset R\delta$, то $\varepsilon\delta = \varepsilon$. Отсюда $\varepsilon = \varepsilon^* = \delta\varepsilon \in \delta R$. Если же $\varepsilon R \subset \delta R$, то $\varepsilon = \delta\varepsilon$. Поэтому $\varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon\delta \in R\delta$, т. е. $R\varepsilon \subset R\delta$.

Справедливость ж) сразу следует из б), в), е) и предложения 13, е).

Для доказательства з) положим $\delta = \Pi_l\alpha$. Ввиду е), $\delta = \varepsilon\delta$. Поэтому $\varepsilon - \delta$ — проекция. Кроме того, учитывая а), получим

$$(\varepsilon - \varepsilon\alpha)(\varepsilon - \delta) = \varepsilon - \varepsilon\alpha - \delta + \varepsilon\alpha = \varepsilon\delta$$

и

$$(\varepsilon - \delta)(\varepsilon - \varepsilon\alpha) = \varepsilon - \delta - \varepsilon\alpha + \delta\alpha = \varepsilon - \varepsilon\alpha.$$

Следовательно, $(\varepsilon - \delta)R = (\varepsilon - \varepsilon\alpha)R$. Ввиду предложения 88, $\varepsilon - \delta = \Pi_r(\varepsilon - \varepsilon\alpha)$.

Предложение 90. *Пусть* ε *и* δ — *проекции* $*$-*регулярного кольца* R. *Тогда*:

а) *если* $\varepsilon\delta = 0$, *то* $\delta\varepsilon = 0$, $\varepsilon \cup \delta = \varepsilon + \delta$ *и* $\varepsilon \cap \delta = 0$;

б) *если* $\varepsilon \leqslant \delta$, *то* $1 - \varepsilon \geqslant 1 - \delta$;

в) $\varepsilon R + \delta R = (\varepsilon \cup \delta)R$, $\varepsilon R \cap \delta R = (\varepsilon \cap \delta)R$;

г) $\varepsilon \leqslant \delta$ *равносильно* $\varepsilon \in \delta R\delta$;

---

[1]) Этим показано, что структура проекций является структурой с ортодополнениями (см. Биркгоф [1], стр. 178).

д) $\varepsilon - \varepsilon \cap \delta \sim \varepsilon \cup \delta - \delta$;

е) *если* $R\varepsilon$ *и* $R\delta$ *перспективны, то* $\varepsilon \sim \delta$;

ж) $\varepsilon R \varepsilon$ — *$*$-регулярное подкольцо кольца* R.

Доказательство. а) Действительно, $(\delta\varepsilon)^* = \varepsilon\delta = 0$, откуда $\delta\varepsilon = 0$. Отсюда $(\varepsilon + \delta)^* = \varepsilon + \delta = (\varepsilon + \delta)^2$, т. е. $\varepsilon + \delta$ — проекция. Ясно, что $R(\varepsilon + \delta) \subset R\varepsilon + R\delta$. Если $\xi = \lambda\varepsilon + \mu\delta$, то $\xi = \xi(\varepsilon + \delta) \in R(\varepsilon + \delta)$. Следовательно, $R\varepsilon + R\delta \subset R(\varepsilon + \delta)$.

Таким образом,

$$\varepsilon \cup \delta = \varepsilon + \delta.$$

Если $\xi \in R\varepsilon \cap R\delta$, то $\xi = \xi\varepsilon = \xi\delta$. Отсюда $\xi = \xi\varepsilon = \xi\delta\varepsilon = 0$, т. е. $\varepsilon \cap \delta = 0$.

б) Вытекает из предложения 89, ж).

в) Вытекает из предложения 89, е).

г) Легко вывести из предложения 89, е).

д) Пусть $\tau = \Pi_r \varepsilon(1 - \delta)$. Ввиду

$$(\varepsilon - \varepsilon \cap \delta)\varepsilon(1 - \delta) = (\varepsilon - \varepsilon \cap \delta)(1 - \delta) = \\ = \varepsilon - \varepsilon \cap \delta - \varepsilon\delta + \varepsilon \cap \delta = \varepsilon(1 - \delta),$$

имеем $(\varepsilon - \varepsilon \cap \delta) R \supset \varepsilon(1 - \delta) R$ или, учитывая предложение 89, е),

$$\varepsilon - \varepsilon \cap \delta \geqslant \tau. \tag{101}$$

Так как $\tau R = \varepsilon(1 - \delta) R \subset \varepsilon R$, то из г) и предложения 89, е) вытекает, что $\varepsilon\tau = \tau\varepsilon = \tau$. Отсюда

$$\varepsilon - \tau = \varepsilon(1 - \delta) + \varepsilon\delta - \tau\varepsilon = \\ = \tau\varepsilon(1 - \delta) + \varepsilon\delta - \tau\varepsilon = -\tau\varepsilon\delta + \varepsilon\delta \in R\delta.$$

Следовательно, $\varepsilon - \tau \in R\varepsilon \cap R\delta$, а значит, $\varepsilon \leqslant \tau \cup (\varepsilon \cap \delta)$. Таким образом,

$$\varepsilon = \tau \cup (\varepsilon \cap \delta). \tag{102}$$

Кроме того, $(\varepsilon \cap \delta)\tau = (\varepsilon \cap \delta)\varepsilon(1 - \delta)\beta = 0$ и $(\varepsilon - \varepsilon \cap \delta)(\varepsilon \cap \delta) = 0$. Применяя а), получим $(\varepsilon \cap \delta) \cap \tau = (\varepsilon - \varepsilon \cap \delta) \cap (\varepsilon \cap \delta) = 0$ и $\varepsilon = (\varepsilon - \varepsilon \cap \delta) \cup (\varepsilon \cap \delta)$. Отсюда, ввиду (101), (102) и Н3, приходим к

$$\varepsilon - \varepsilon \cap \delta = \tau = \Pi_r \varepsilon(1 - \delta). \tag{103}$$

Далее, из соотношения

$$\varepsilon(1 - \delta)(\varepsilon \cup \delta - \delta) = \varepsilon(\varepsilon \cup \delta - \delta - \delta + \delta) = \varepsilon - \varepsilon\delta = \varepsilon(1 - \delta)$$

вытекает, что $R\varepsilon(1 - \delta) \in R(\varepsilon \cup \delta - \delta)$, т. е. что

$$\Pi_l \varepsilon(1 - \delta) \leqslant \varepsilon \cup \delta - \delta. \tag{104}$$

Но

$$\lambda\varepsilon + \mu\delta = \lambda\varepsilon(1-\delta) + (\mu + \lambda\varepsilon)\delta.$$

Следовательно,

$$R\varepsilon + R\delta \subset R\varepsilon(1-\delta) + R\delta.$$

Поскольку обратное включение очевидно, то $\Pi_l\varepsilon(1-\delta) \cup \cup \delta = \varepsilon \cup \delta$. Так как $(\varepsilon \cup \delta - \delta)\delta = 0$ и $\Pi_l\varepsilon(1-\delta)\delta = \xi\varepsilon(1-\delta)\delta = 0$, то, применяя а), (104) и Н3, придем к $\Pi_l\varepsilon(1-\delta) = \varepsilon \cup \delta - \delta$. Сопоставляя этот результат с (103) и учитывая предложение 89, г), получим требуемое соотношение.

е) Пусть проекция σ является общим дополнением проекций ε и δ. Тогда, применяя д) и предложение 87, а), получаем

$$\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon \cap \sigma \infty \varepsilon \cup \sigma - \sigma = 1 - \sigma = \delta \cup \sigma - \sigma \infty \delta - \delta \cap \sigma = \delta.$$

ж) Если $\alpha \in \varepsilon R\varepsilon$, то $\alpha\varepsilon = \alpha = \varepsilon\alpha$. Найдем $\xi \in R$ такой, что $\alpha\xi\alpha = \alpha$. Отсюда $\alpha\varepsilon\xi\varepsilon\alpha = \alpha\xi\alpha = \alpha$, что и доказывает регулярность кольца $\varepsilon R\varepsilon$. Так как $\alpha^* = (\varepsilon\alpha\varepsilon)^* = \varepsilon\alpha^*\varepsilon \in \varepsilon R\varepsilon$, то все доказано.

Предложение 91. *Если α — элемент $*$-регулярного кольца R, $\varepsilon = \Pi_l\alpha$, $\delta = \Pi_r\alpha$, то существует единственный элемент $\eta \in R$, удовлетворяющий соотношениям $\eta\delta = \eta$ и $\eta\alpha = \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \xi\alpha$. Если $\eta = \xi\delta$, то $\eta\delta = \xi\delta^2 = \xi\delta = \eta$ и $\eta\alpha = \xi\delta\alpha = \xi\alpha = \varepsilon$. Допустив, что $\zeta\delta = \zeta$, $\zeta\alpha = \varepsilon$, будем иметь $(\eta - \zeta)\alpha = 0$. Отсюда

$$\eta - \zeta = (\eta - \zeta)\delta = (\eta - \zeta)\alpha\gamma = 0,$$

т. е. $\eta = \zeta$.

Элемент, существование и единственность которого доказаны в предложении 91, назовем *относительно обратным* к α и будем обозначать через $O(\alpha)$.

Предложение 92. *Если R $*$-регулярное кольцо, то*:

а) $\alpha O(\alpha) = \Pi_r\alpha$;

б) $\Pi_r\alpha = \Pi_l O(\alpha)$;

в) $\Pi_l\alpha = \Pi_r O(\alpha)$;

г) *если S — такое подкольцо кольца R, что из $\alpha \in S$ вытекает $O(\alpha) \in S$, то S регулярно*;

д) *если ε — проекция и $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha$, то $\varepsilon O(\alpha) = O(\alpha)\varepsilon$*;

е) $O(O(\alpha)) = \alpha$.

Доказательство. Если $\Pi_r\alpha = \alpha\xi$, то, учитывая определение $O(\alpha)$ и предложение 89, а), будем иметь

$$\alpha \cdot O(\alpha) = \alpha \cdot O(\alpha) \cdot \Pi_r\alpha = \alpha \cdot O(\alpha) \cdot \alpha\xi = \alpha \cdot \Pi_l\alpha \cdot \xi = \alpha\xi = \Pi_r\alpha.$$

Отсюда $R \cdot O(\alpha) = R \cdot \Pi_r \alpha$, а значит, $\Pi_r \alpha = \Pi_l O(\alpha)$. Из тех же соображений

$$\Pi_l \alpha \cdot O(\alpha) = O(\alpha)\, \alpha \cdot O(\alpha) = O(\alpha) \cdot \Pi_r \alpha = O(\alpha),$$

что приводит к $\Pi_l \alpha \cdot R = O(\alpha) R$, т. е. к

$$\Pi_l \alpha = \Pi_r O(\alpha).$$

Справедливость г) следует из соотношения $\alpha \cdot O(\alpha)\, \alpha = \alpha \cdot \Pi_l \alpha = \alpha$ и условия $O(\alpha) \in S$ для всякого $\alpha \in S$. Для доказательства свойства д) обозначим через S подкольцо элементов, коммутирующих с ε. Учитывая, что $\varepsilon R \varepsilon (1 - \varepsilon) \times R (1 - \varepsilon) = 0$, можно записать $\varepsilon R \varepsilon \dotplus (1 - \varepsilon) R (1 - \varepsilon) \subset S$. Обратное включение имеет место, так как

$$\beta - \varepsilon \beta \varepsilon = \beta - \beta \varepsilon = \beta (1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon) \beta (1 - \varepsilon)$$

справедливо для всех $\beta \in S$. Таким образом,

$$S = \varepsilon R \varepsilon \dotplus (1 - \varepsilon) R (1 - \varepsilon).$$

Ввиду предложения 90, ж), каждое слагаемое $*$-регулярно, а значит, $*$-регулярно и все кольцо S. Поэтому $\Pi_l \alpha$, $\Pi_r \alpha \in S$. Применяя предложение 91 к кольцу S и учитывая единственность $O(\alpha)$, будем иметь $O(\alpha) \in S$.

Справедливость свойства е) вытекает из соотношений

$$\alpha \cdot \Pi_r O(\alpha) = \alpha \cdot \Pi_l \alpha = \alpha$$

и

$$\alpha \cdot O(\alpha) = \Pi_r \alpha = \Pi_l O(\alpha),$$

получающихся в результате применения а), б), в) и предложения 89, а).

Будем говорить, что $*$-регулярное кольцо *полно*, если полна структура его проекций. Условимся значком LUB ε_α заменять слова: «*точная верхняя граница множества проекций* $\{\varepsilon_\alpha\}$».

Предложение 93. *Если R — полное $*$-регулярное кольцо, то*:

а) *если* $\varepsilon = \mathrm{LUB} \varepsilon_\gamma$ *и* $\varepsilon_\gamma \alpha = 0$ *для всех* γ, *то* $\varepsilon \alpha = 0$;

б) *если* $\varepsilon = \mathrm{LUB} \varepsilon_\gamma$ *и* $\alpha \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma \alpha$ *для всех* γ, *то* $\alpha \varepsilon = \varepsilon \alpha$;

в) *если множество проекций* $M \subset R$ *и* $S = \{\xi;\ \sigma \xi = \xi \sigma$ *для всех* $\sigma \in M\}$, *то* S — *полное $*$-регулярное подкольцо кольца* R.

Доказательство. а) Имеем $\varepsilon_\gamma \Pi_r \alpha = \varepsilon_\gamma \alpha \xi = 0$, откуда $\varepsilon_\gamma \leqslant 1 - \Pi_r \alpha$ для всех γ. Поэтому $\varepsilon \leqslant 1 - \Pi_r \alpha$. Отсюда $\varepsilon \Pi_r \alpha = 0$, а значит, $\varepsilon \alpha = \varepsilon (\Pi_r \alpha) \eta = 0$.

б) Так как $\varepsilon \geqslant \varepsilon_\gamma$, то $\varepsilon_\gamma \varepsilon = \varepsilon_\gamma$. Отсюда $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma^* = (\varepsilon_\gamma \varepsilon)^* = \varepsilon\varepsilon_\gamma$. Из этих равенств следует, что

$$\varepsilon_\gamma(\alpha - \alpha\varepsilon) = \varepsilon_\gamma\alpha - \varepsilon_\gamma\alpha\varepsilon = \varepsilon_\gamma\alpha - \alpha\varepsilon_\gamma\varepsilon = 0,$$

$$\varepsilon_\gamma(\alpha - \varepsilon\alpha)^* = [(\alpha - \varepsilon\alpha)\varepsilon_\gamma]^* = (\alpha\varepsilon_\gamma - \varepsilon\varepsilon_\gamma\alpha)^* = (\alpha\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\gamma\alpha)^* = 0.$$

Применяя а), приходим к

$$[(\alpha - \varepsilon\alpha)\varepsilon]^* = \varepsilon(\alpha - \varepsilon\alpha)^* = 0 = \varepsilon(\alpha - \alpha\varepsilon),$$

откуда $\varepsilon\alpha = \varepsilon\alpha\varepsilon = \alpha\varepsilon$.

в) Из предложений 92, д) и 92, г) вытекает, что S регулярно. Если $\xi \in S$, то $\sigma\xi^* - \xi^*\sigma = (\xi\sigma - \sigma\xi)^* = 0$ для всех $\sigma \in M$. Следовательно, S $*$-регулярно. Полнота кольца S вытекает из б).

Скажем, что проекции ε и δ *ортогональны* (в обозначениях $\varepsilon \perp \delta$), если $\varepsilon\delta = 0$. Из предложения 90, а) вытекает, что отношение ортогональности симметрично. Систему проекций $\{\varepsilon_\gamma\}$ назовем *ортогональной*, если $\varepsilon_\beta \perp \varepsilon_\gamma$ при любых $\beta \neq \gamma$.

Предложение 94. *Если $\{\tau_\lambda\}$ — ортогональная система центральных проекций $*$-регулярного кольца R, $\beta_\lambda \in R\tau_\lambda$, $\beta_\lambda^2 = 0$, то найдется такой элемент $\beta \in R$, что $\beta\tau_\lambda = \beta_\lambda$ для всех λ.*

Лемма 1. *Если $\beta \in R$, $\varepsilon = \Pi_l\beta$, $\delta = \Pi_r\beta$, $\gamma = O(\beta)$, $\sigma = \Pi_l(\varepsilon + \gamma)$, то $\delta \leqslant \varepsilon \cup \sigma$.*

Доказательство. Пусть $\tau = \varepsilon \cup \sigma$. Так как $\sigma \leqslant \tau$, то $(\varepsilon + \gamma)\tau = \varepsilon + \gamma$. Отсюда, поскольку $\varepsilon\tau = \varepsilon$, вытекает, что $\gamma\tau = \gamma$, т. е. $\Pi_l\gamma \leqslant \tau$. Но, согласно предложению 92, б), $\Pi_l\gamma = \delta$, а значит, $\delta \leqslant \tau$.

Лемма 2. *Если $\beta \in R$, $\beta^2 = 0$ и в обозначениях леммы 1 имеет место $\delta = \xi\varepsilon + \eta\sigma$ для некоторых $\xi, \eta \in R$, то $\beta = -\xi\varepsilon$.*

Действительно, $\varepsilon\delta \in R\beta\beta R = 0$. Отсюда, учитывая предложения 92, б), 92, в) и 90, а), получаем $\gamma^2 \in R\delta\varepsilon R = 0$. Для некоторого $\zeta \in R$ имеем

$$\delta = \xi\varepsilon + \eta\zeta(\varepsilon + \gamma). \tag{105}$$

Умножая справа на γ и применяя предложения 92, в), 89, а), приходим к

$$\xi\varepsilon\gamma + \eta\zeta\varepsilon\gamma = \delta\gamma = \delta\varepsilon\gamma = 0. \tag{106}$$

После умножения (105) справа на δ и применения предложений 92, б), 92, в), 89, а), а также соотношения (106) получаем

$$\delta=\eta\zeta\gamma\delta=\eta\zeta\varepsilon\gamma=(-\xi\varepsilon)\gamma.$$

Ввиду предложений 92, б), 92, в) и 92, е), отсюда и из $(-\xi\varepsilon)\varepsilon=-\xi\varepsilon$ следует, что $-\xi\varepsilon=O(\gamma)=\beta$.

Лемма 3. *Если* $\{\tau_\lambda\}$ — *ортогональная система центральных проекций*, $\delta_\lambda\leqslant\tau_\lambda$, $\mathrm{LUB}\delta_\lambda=\delta$, *то* $\delta_\lambda\delta=\delta_\lambda=\tau_\lambda\delta$ *для каждого* λ.

Доказательство. Пусть $\delta'=\mathrm{LUB}_{\mu\neq\lambda}\delta_\mu$. Если $\mu\neq\lambda$, то $\delta_\mu\delta_\lambda\in R\tau_\mu R\tau_\lambda=0$. Отсюда, ввиду предложений 90, а) и 93, а), вытекает, что $\delta_\lambda\delta'=0$ и

$$\delta=\delta'\cup\delta_\lambda=\delta'+\delta_\lambda.$$

Поэтому $\delta_\lambda\delta=0+\delta_\lambda$, а применение предложения 93, а) приводит к

$$\tau_\lambda\delta=\tau_\lambda\delta'\mathrm{LUB}_{\mu\neq\lambda}\tau_\mu+\tau_\lambda\delta_\lambda=0+\delta_\lambda.$$

Начиная доказательство предложения, положим $\varepsilon_\lambda=\Pi_l\beta_\lambda$, $\delta_\lambda=\Pi_r\beta_\lambda$, $\gamma_\lambda=O(\beta_\lambda)$, $\sigma_\lambda=\Pi_l(\varepsilon_\lambda+\gamma_\lambda)$, $\varepsilon=\mathrm{LUB}\varepsilon_\lambda$, $\delta=\mathrm{LUB}\delta_\lambda$, $\sigma=\mathrm{LUB}\sigma_\lambda$. Ввиду леммы 1, $\delta_\lambda\leqslant\varepsilon_\lambda\cup\sigma_\lambda$. Поэтому $\delta\leqslant\varepsilon\cup\sigma$, откуда

$$\delta=\xi\varepsilon+\eta\sigma \tag{107}$$

для некоторых ξ, $\eta\in R$. Ясно, что ε_λ, $\delta_\lambda\leqslant\tau_\lambda$. Согласно предложению 92, б), $R\gamma_\lambda=R\delta_\lambda$. Отсюда $R(\varepsilon_\lambda+\gamma_\lambda)\leqslant R\tau_\lambda$, а значит, $\sigma_\lambda\leqslant\tau_\lambda$. Поэтому, умножая (107) на τ_λ и применяя лемму 3, будем иметь $\delta_\lambda=\xi\varepsilon_\lambda+\eta\sigma_\lambda$. Отсюда, ввиду леммы 2, следует, что $\beta_\lambda=-\xi\varepsilon_\lambda$. Положив $\beta=-\xi\varepsilon$ и применяя лемму 3, получаем, что $\beta\tau_\lambda=-\xi\varepsilon\tau_\lambda=-\xi\varepsilon_\lambda=\beta_\lambda$.

Предложение 95. *Если* ε_1, ε_2, ... — *бесконечная ортогональная система проекций полного* $*$-*регулярного кольца* R, $\mathrm{LUB}\varepsilon_i=\varepsilon$, $\alpha_k\in\varepsilon_{2k-1}R\varepsilon_{2k}$, *то найдется такой элемент* $\alpha\in\varepsilon R\varepsilon$, *что*

$$\varepsilon_i\alpha\varepsilon_j=\begin{cases}\alpha_k, & \text{если } i=2k-1,\ j=2k,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Положим $\tau_k=\varepsilon_{2k-1}+\varepsilon_{2k}$. Из предложений 90, а) и 90, г) вытекает, что $\tau_k\in\varepsilon R\varepsilon$. Кроме того, предложения 90, ж) и 90, г) показывают, что $\varepsilon R\varepsilon$ — полное $*$-регулярное кольцо. Отсюда, ввиду предложения 93, в), следует, что $S=\{\xi;\ \xi\in\varepsilon R\varepsilon,\ \xi\tau_k=\tau_k\xi$ для всех $k\}$ является полным $*$-регулярным кольцом. Так как $\alpha_k = \varepsilon_{2k-1}\alpha_k\varepsilon_{2k}$, то $\alpha_k^2 = \varepsilon_{2k-1}\alpha_k\varepsilon_{2k}\varepsilon_{2k-1}\alpha_k\varepsilon_k = 0$,

$$\alpha_k\tau_i = \alpha_k(\varepsilon_{2i-1} + \varepsilon_{2i}) = \begin{cases} \alpha_k, & \text{если } k = i, \\ 0, & \text{если } k \neq i, \end{cases}$$

$$\tau_i\alpha_k = (\varepsilon_{2i-1} + \varepsilon_{2i})\,\alpha_k = \begin{cases} \alpha_k, & \text{если } k = i, \\ 0, & \text{если } k \neq i, \end{cases}$$

$\alpha_k \in \varepsilon_{2k-1}R\varepsilon_{2k} \subset \varepsilon R\varepsilon$. Последние соотношения показывают, что $\alpha_k \in S$. Поскольку $\{\tau_k\}$ является системой центральных проекций кольца S, а при $i \neq j$ имеет место $\tau_i\tau_j = (\varepsilon_{2i-1} + \varepsilon_{2i})(\varepsilon_{2j-1} + \varepsilon_{2j}) = 0$, то предложение 94 позволяет найти такой элемент $\alpha \in S$, что $\alpha\tau_k = \alpha_k$ для всех k. Если $j = 2k$ или $2k - 1$, то $\tau_k\varepsilon_j = (\varepsilon_{2k-1} + \varepsilon_{2k})\,\varepsilon_j = \varepsilon_j$. Поэтому

$$\varepsilon_i\alpha\varepsilon_j = \varepsilon_i\alpha\tau_k\varepsilon_j = \varepsilon_i\alpha_k\varepsilon_j = \varepsilon_i\varepsilon_{2k-1}\alpha_k\varepsilon_{2k}\varepsilon_j,$$

откуда и следует наше утверждение.

Предложение 96. *Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — бесконечная ортогональная система проекций полного $*$-регулярного кольца R, $\mathrm{LUB}\,\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_{2k-1} \sim \varepsilon_{2k}$, $\alpha_i \in \varepsilon_i R\varepsilon_i$, то найдется такой элемент $\alpha \in R$, что*

$$\varepsilon_i\alpha\varepsilon_j = \begin{cases} \alpha_i, & \textit{если } i = j, \\ 0, & \textit{если } i \neq j. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть ξ_k и η_k — элементы, служащие для установления эквивалентности элементов ε_{2k-1} и ε_{2k}, т. е. $\varepsilon_{2k-1} = \xi_k\eta_k$, $\varepsilon_{2k} = \eta_k\xi_k$, $\xi_k \in \varepsilon_{2k-1}R\varepsilon_{2k}$, $\eta_k \in \varepsilon_{2k}R\varepsilon_{2k-1}$. Так как $\alpha_{2k-1}\xi_k \in \varepsilon_{2k-1}R\varepsilon_{2k}$ и $\alpha_{2k}\eta_k \in \varepsilon_{2k}R\varepsilon_{2k-1}$, то, применив предложение 95, найдем такие элементы λ, μ, ξ и η, что

$$\varepsilon_{2k-1}\lambda\varepsilon_{2k} = \alpha_{2k-1}\xi_k, \qquad \varepsilon_{2k}\mu\varepsilon_{2k-1} = \alpha_{2k}\eta_k,$$

$$\varepsilon_{2k-1}\xi\varepsilon_{2k} = \xi_k, \qquad \varepsilon_{2k}\eta\varepsilon_{2k-1} = \eta_k,$$

для всех других значений i и j имеет место

$$\varepsilon_i\lambda\varepsilon_j = \varepsilon_i\mu\varepsilon_j = \varepsilon_i\xi\varepsilon_j = \varepsilon_i\eta\varepsilon_j = 0.$$

Покажем, что $\alpha = \lambda\eta + \mu\xi$ и является искомым элементом.

Так как $\varepsilon_j\lambda^*\varepsilon_{2k} = (\varepsilon_{2k}\lambda\varepsilon_j)^* = 0$ для всех j и $\mathrm{LUB}\varepsilon_j = 1$, из предложения 93, а) следует, что $\varepsilon_{2k}\lambda = (\lambda^*\varepsilon_{2k})^* = 0$. Кроме того,

$$\varepsilon_j\,[\mu^*\varepsilon_{2k} - \varepsilon_{2k-1}\mu^*\varepsilon_{2k}] = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq 2k - 1, \\ \eta_k^*\alpha_{2k}^* - \eta_k^*\alpha_{2k}^* = 0, & \text{если } j = 2k - 1. \end{cases}$$

Снова применяя предложение 93, а), получаем, что $\varepsilon_{2k}\mu - \varepsilon_{2k}\mu\varepsilon_{2k-1} = 0$. Аналогично проверяется, что $\varepsilon_{2k-1}\xi - \varepsilon_{2k-1}\xi\varepsilon_{2k} = 0$. Следовательно,

$$\varepsilon_{2k}\alpha = \varepsilon_{2k}\lambda\eta + \varepsilon_{2k}\mu\xi = \varepsilon_{2k}\mu\varepsilon_{2k-1}\xi = \varepsilon_{2k}\mu\varepsilon_{2k-1}\xi\varepsilon_{2k} = \\ = \alpha_{2k}\eta_k\xi_k = \alpha_{2k}\varepsilon_{2k},$$

откуда

$$\varepsilon_{2k}\alpha\varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq 2k, \\ \alpha_{2k}\varepsilon_{2k} = \alpha_{2k}, & \text{если } j = 2k. \end{cases}$$

Рассуждая, как и выше, можно получить

$$\varepsilon_{2k-1}\mu = \varepsilon_{2k-1}\lambda - \varepsilon_{2k-1}\lambda\varepsilon_{2k} = \varepsilon_{2k}\eta - \varepsilon_{2k}\eta\varepsilon_{2k-1} = 0.$$

Поэтому

$$\varepsilon_{2k-1}\alpha = \varepsilon_{2k-1}\lambda\eta + \varepsilon_{2k-1}\mu\xi = \varepsilon_{2k-1}\lambda\varepsilon_{2k}\eta\varepsilon_{2k-1} = \alpha_{2k-1}\xi_k\eta_k = \\ = \alpha_{2k-1}\varepsilon_{2k-1},$$

откуда

$$\varepsilon_{2k-1}\alpha\varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq 2k-1, \\ \alpha_{2k-1}\varepsilon_{2k-1} = \alpha_{2k-1}, & \text{если } j = 2k-1. \end{cases}$$

28. Конечность. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — бесконечная последовательность эквивалентных попарно ортогональных проекций $*$-регулярного кольца R, причем $\mathrm{LUB}\varepsilon_i = 1$. Обозначим через ε_{1i} и ε_{i1} элементы, служащие для установления эквивалентности проекций ε_1 и ε_i, причем $\varepsilon_{1i} \in \varepsilon_1 R \varepsilon_i$, $\varepsilon_{i1} \in \varepsilon_i R \varepsilon_1$. Положим

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{i1}\varepsilon_{1j}, & \text{если } i \neq j, \\ \varepsilon_i, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Тогда

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq k, \\ \varepsilon_{il}, & \text{если } j = k. \end{cases} \tag{108}$$

Действительно,

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jl} = \varepsilon_{i1}\varepsilon_{1j}\varepsilon_{j1}\varepsilon_{1l} = \varepsilon_{i1}\varepsilon_1\varepsilon_{1l} = \varepsilon_{i1}\varepsilon_{1l} = \varepsilon_{il}.$$

Если же $j \neq k$, то

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{i1}\varepsilon_{1j}\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_{k1}\varepsilon_{1l} = 0.$$

Пусть

$$D = \{\xi;\ \varepsilon_{ij}\xi = \xi\varepsilon_{ij} \text{ для всех } i, j\}.$$

Предложение 97. *В полном $*$-регулярном кольце R имеет место*:

а) *если* $\xi \in D$ *и* $\varepsilon_{ij}\xi = 0$ *для какого-либо* ε_{ij}, *то* $\xi = 0$;

б) *отображение* $\xi \to \xi\varepsilon_i$ *является изоморфизмом* D *на* $\varepsilon_i R \varepsilon_i$;

в) $\varepsilon_i R \varepsilon_j = D\varepsilon_{ij}$, *причем каждый элемент из* $\varepsilon_i R \varepsilon_j$ *представляется в форме* $\xi\varepsilon_{ij}$, *где* $\xi \in D$, *единственным образом.*

Доказательство. а) Применяя (108), будем иметь $\varepsilon_k \xi = \varepsilon_{kj}\varepsilon_{jk}\xi = \varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}\xi\varepsilon_{jk} = 0$ для всех k. Но тогда из предложения 93, а) вытекает, что $\xi = \mathrm{LUB}\varepsilon_k \cdot \xi = 0$.

б) Ясно, что $\xi \to \xi\varepsilon_i = \varepsilon_i \xi \varepsilon_i$ — гомоморфизм D в $\varepsilon_i R \varepsilon_i$. Из а) следует, что это изоморфизм. Ввиду предложения 93, в), множество $E = \{\xi;\ \varepsilon_k \xi = \xi\varepsilon_k$ для всех $k\}$ является полным $*$-регулярным кольцом. Пусть $\eta \in \varepsilon_i R \varepsilon_i$. Положим $\alpha_j = \varepsilon_{ji}\eta\varepsilon_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots$ Из (108) следует, что $\alpha_j \in E$ и $\alpha_j \in \varepsilon_j E \varepsilon_j$. Ввиду предложения 96, найдется такой элемент $\alpha \in E$, что $\varepsilon_j \alpha \varepsilon_j = \alpha_j$ для каждого j. Применяя (108), будем иметь

$$\varepsilon_{km}\alpha = \varepsilon_{km}\varepsilon_m \alpha \varepsilon_m = \varepsilon_{km}\alpha_m = \varepsilon_{km}\varepsilon_{mi}\eta\varepsilon_{im} = \varepsilon_{ki}\eta\varepsilon_{im}$$

и

$$\alpha\varepsilon_{km} = \varepsilon_k \alpha \varepsilon_k \varepsilon_{km} = \alpha_k \varepsilon_{km} = \varepsilon_{ki}\eta\varepsilon_{ik}\varepsilon_{km} = \varepsilon_{ki}\eta\varepsilon_{im}.$$

Следовательно, $\alpha \in D$. Но $\alpha \to \alpha\varepsilon_i = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_i = \alpha_i = \varepsilon_i \eta \varepsilon_i = \eta$.

в) Ввиду (108) и б), имеем

$$\varepsilon_i R \varepsilon_j = \varepsilon_i R \varepsilon_{ji}\varepsilon_{ij} \subset \varepsilon_i R \varepsilon_i \varepsilon_{ij} = D\varepsilon_i \varepsilon_{ij} = D\varepsilon_{ij} \subset \varepsilon_i R \varepsilon_i \varepsilon_{ij} \subset \varepsilon_i R \varepsilon_j.$$

Единственность представления сразу следует из а).

Теорема 24. *Полное $*$-регулярное кольцо R не может содержать бесконечной ортогональной системы попарно эквивалентных проекций* [1]).

Допустим, что в R содержится бесконечная ортогональная система эквивалентных проекций. Выберем из этой системы бесконечную последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Элемент $\varepsilon = \mathrm{LUB}\,\varepsilon_i$ является единицей кольца $\varepsilon R \varepsilon$, которое, в силу предложений 90, г) и 90, ж) является полным $*$-регулярным кольцом с единицей ε. Таким образом, для доказательства теоремы 24 достаточно установить, что полное $*$-регулярное кольцо R не может содержать бесконечной ортогональной последовательности эквивалентных проекций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, удовлетворяющей соотношению $\mathrm{LUB}\,\varepsilon_i = 1$.

---

[1]) Kaplansky [4].

Допустим, что такая последовательность есть. Тогда, согласно предложению 97, в), для любого $\alpha \in R$ и любой пары (i, j) существует единственный элемент $\alpha_{ij} \in D$, удовлетворяющий соотношению $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = \alpha_{ij} \varepsilon_{ij}$.

Лемма 1. *Если $\alpha_i \in \varepsilon_i R \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, то найдется $\alpha \in R$ такой, что $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_{i+1} = \alpha_i$ для всех i, а $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = 0$, если $j \neq i + 1$.*

Доказательство. Пусть $\delta = \underset{2 \leqslant i \leqslant \infty}{\mathrm{LUB}}\ \varepsilon_i$. Ввиду предложений 90, г) и 90, ж), кольцо $\delta R \delta$ является полным $*$-регулярным кольцом с единицей δ. Воспользовавшись предложением 95, найдем такие элементы $\beta \in R$ и $\gamma \in \delta R \delta$, что

$$\varepsilon_i \beta \varepsilon_j = \begin{cases} \alpha_{2k-1}, & \text{если} \quad i = 2k - 1, \quad j = 2k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а для $i, j \geqslant 2$ имеет место

$$\varepsilon_i \gamma \varepsilon_j = \begin{cases} \alpha_{2k}, & \text{если} \quad i = 2k, \quad j = 2k + 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из предложений 93, а) и 90, а) вытекает, что $\varepsilon_1 \delta = \delta \varepsilon_1 = 0$. Поэтому $\gamma \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \gamma = 0$. Положим $\alpha = \beta + \gamma$. Тогда для $k = 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$\varepsilon_1 \alpha \varepsilon_j = \varepsilon_1 \beta \varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j \neq 2, \\ \alpha_1, & \text{если} \quad j = 2, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{2k+1} \alpha \varepsilon_j = \varepsilon_{2k+1} \beta \varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j \neq 2k + 2, \\ \alpha_{2k+1}, & \text{если} \quad j = 2k + 2, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{2k} \alpha \varepsilon_j = \varepsilon_{2k} \gamma \varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j \neq 2k + 1, \\ \alpha_{2k}, & \text{если} \quad j = 2k + 1, \end{cases}$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности элементов из D, то найдется такой элемент $\alpha \in R$, что*

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \xi_i, & \textit{если} \quad i = j, \\ \eta_i, & \textit{если} \quad i = j + 1, \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Действительно, воспользовавшись предложением 96 и леммой 1, найдем такие элементы β, $\gamma \in R$, что

$$\varepsilon_i \beta \varepsilon_j = \begin{cases} \xi_i \varepsilon_{ii}, & \text{если} \quad j = i, \\ 0, & \text{если} \quad j \neq i, \end{cases}$$

$$\varepsilon_i \gamma \varepsilon_j = \begin{cases} \eta_i \varepsilon_{i\,i+1}, & \text{если} \quad j = i+1, \\ 0, & \text{если} \quad j \neq i+1. \end{cases}$$

Если $\alpha = \beta + \gamma$, то

$$\varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = \begin{cases} \xi_i \varepsilon_{ii}, & \text{если} \quad j = i, \\ \eta_i \varepsilon_{i\,i+1}, & \text{если} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

что и доказывает лемму.

Лемма 3. *Если* $\lambda_{ij} = (\varepsilon_{ij}^*)_{ji}$, *то* $\lambda_{ji}\lambda_{ij} = 1$.

Действительно, поскольку $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_j \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_i$, то

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^* = \varepsilon_{ji}^* \varepsilon_{ij}^* = \lambda_{ji} \varepsilon_{ij} \lambda_{ij} \varepsilon_{ji} = \lambda_{ji} \lambda_{ij} \varepsilon_i.$$

Отсюда $(1 - \lambda_{ji}\lambda_{ij})\varepsilon_i = 0$. Но $1 - \lambda_{ji}\lambda_{ij} \in D$ и из предложения 97, а) вытекает, что $1 - \lambda_{ji}\lambda_{ij} = 0$.

Лемма 4. *Если* $\alpha \in R$ *и* $\alpha_{ij} = 0$ *для всех* i, j, *то* $\alpha = 0$.

Доказательство. Так как $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = 0$ для всех i, то из предложения 93, а) вытекает, что $\alpha \varepsilon_j = 0$, т. е. $\varepsilon_j \alpha^* = 0$. Вторичное применение предложения 93, а) приводит к $\alpha = 0$.

Лемма 5. *Для любой последовательности* ξ_1, ξ_2, ... *элементов из* D *найдется такой элемент* $\alpha \in R$, *что*

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \xi_j, & \textit{если} \quad i = 1, \\ 0, & \textit{если} \quad i \neq 1. \end{cases}$$

Для доказательства достаточно установить существование такого элемента β, что $\beta_{1j} = 1$ (остальные β_{ij} произвольны). Действительно, лемма 2 обеспечивает существование такого элемента $\gamma \in R$, что $\gamma_{ii} = \xi_i$, а $\gamma_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Положим $\alpha = \varepsilon_1 \beta \gamma$. Тогда при $i \neq 1$ имеем $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = 0$, т. е. $\alpha_{ij} = 0$. С другой стороны, $\varepsilon_j [\gamma \varepsilon_j - \varepsilon_j \gamma \varepsilon_j] = 0$, а при $k \neq j$ имеет место $\varepsilon_k [\gamma \varepsilon_j - \varepsilon_j \gamma \varepsilon_j] = \gamma_{kj} \varepsilon_{kj} = 0$. Поэтому из предложения 93, а) вытекает, что $\gamma \varepsilon_j - \varepsilon_j \gamma \varepsilon_j = 0$. Отсюда

$$\varepsilon_1 \alpha \varepsilon_j = \varepsilon_1 \beta \gamma \varepsilon_j = \varepsilon_1 \beta \varepsilon_j \gamma \varepsilon_j = \beta_{1j} \varepsilon_{1j} \gamma_{jj} \varepsilon_j = \beta_{1j} \gamma_{jj} \varepsilon_{1j} = \xi_j \varepsilon_{1j},$$

т. е. $\alpha_{1j} = \xi_j$.

Для построения вышеуказанного элемента β найдем, воспользовавшись леммой 2, такой элемент μ, что $\mu_{ii}=1$, $\mu_{i\,i+1}=-1$ и $\mu_{ij}=0$, если $j\neq i,\ i+1$. Пусть $\Pi_i\mu=1-\delta$. Тогда из предложения 89, в) следует, что

$$\mu\delta=0. \tag{109}$$

Далее, используя (108), для $j\neq i,\ i+1$ получаем

$$\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_j=\varepsilon_{ki}\varepsilon_i\mu\varepsilon_j=\varepsilon_{ki}\mu_{ij}\varepsilon_{ij}=0.$$

Поэтому для всякого j имеет место

$$[\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_i+\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{ki}\mu]\,\varepsilon_j=0.$$

Отсюда

$$\varepsilon_j\,[\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_i+\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{ki}\mu]^*=0,$$

и предложение 93, а) приводит к

$$\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_i+\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_{i+1}=\varepsilon_{ki}\mu.$$

Учитывая этот результат и (108), получаем

$$\varepsilon_{ki}-\varepsilon_{k\,i+1}=\varepsilon_{ki}\mu_{ii}\varepsilon_i+\varepsilon_{ki}\mu_{i\,i+1}\varepsilon_{i\,i+1}=\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_i+\varepsilon_{ki}\mu\varepsilon_{i+1}=\varepsilon_{ki}\mu.$$

Отсюда после применения (108), $\delta_{ij}\in D$ и (109) вытекает

$$[\delta_{ik}-\delta_{i+1\,k}]\,\varepsilon_k=\varepsilon_{ki}\delta_{ik}\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{k\,i+1}\delta_{i+1\,k}\varepsilon_{i+1\,k}=$$
$$=\varepsilon_{ki}\,\delta\varepsilon_k-\varepsilon_{k\,i+1}\,\delta\varepsilon_k=[\varepsilon_{ki}-\varepsilon_{k\,i+1}]\,\delta\varepsilon_k=\varepsilon_{ki}\mu\,\delta\varepsilon_k=0.$$

В силу предложения 97, а) отсюда следует, что $\delta_{ik}-\delta_{i+1\,k}=0$, т. е. δ_{ij} не зависит от первого индекса. Положим $\delta_j=\delta_{ij}$. Тогда

$$(\delta_1\varepsilon_{i1})^*=(\varepsilon_i\,\delta\varepsilon_1)^*=\varepsilon_1\,\delta\varepsilon_i=\delta_i\varepsilon_{1i}. \tag{110}$$

В частности, $\delta_1\varepsilon_1=\varepsilon_1\delta_1^*$. Умножая слева на ε_{i1} и учитывая, что $\delta_1\in D$, получим $\delta_1\varepsilon_{i1}=\varepsilon_{i1}\delta_1^*$. Подставляя этот результат в (110) и применяя обозначения леммы 3, получим

$$\delta_i\varepsilon_{1i}=(\varepsilon_{i1}\delta_1^*)^*=\delta_1\varepsilon_{i1}^*=\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_{i1}^*\varepsilon_i=\delta_1\lambda_{i1}\varepsilon_{1i}.$$

Так как $\delta_i-\delta_i\lambda_{i1}\in D$, то из предложения 97, а) вытекает

$$\delta_i=\delta_1\lambda_{i1}. \tag{111}$$

Из предложений 90, ж) и 97, б) следует, что D — $*$-регулярное кольцо. Согласно предложению 88, в D найдется такая проекция σ, что $\delta_1D=(1-\sigma)D$. Тогда $\sigma\delta_1=0$ и, ввиду (111), $\sigma\delta_k = 0$ для всех k. Поэтому для любых i, k имеет место

$$\varepsilon_i\sigma\,\delta\varepsilon_k = \sigma\varepsilon_i\,\delta\varepsilon_k = \sigma\delta_{ik}\varepsilon_{ik} = \sigma\delta_k\varepsilon_{ik} = 0.$$

Следовательно, $(\sigma\delta)_{ik} = 0$ и лемма 4 приводят к

$$\sigma\delta = 0. \qquad (112)$$

Далее найдем такое $\zeta \in D$, что $1 - \sigma = \delta_1\zeta$. Затем, воспользовавшись леммой 2, отыщем такой элемент $\nu \in R$, что $\nu_{ii} = \lambda_{1i}\zeta$, а $\nu_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Так как при $k \neq j$ имеет место

$$\varepsilon_k\nu\varepsilon_j = \nu_{kj}\varepsilon_{kj} = 0,$$

то

$$\varepsilon_k\,[\varepsilon_j\nu\varepsilon_j - \nu\varepsilon_j] = 0 \quad \text{для всех} \quad k.$$

Применив предложение 93, а), получим, что $\varepsilon_j\nu\varepsilon_j = \nu\varepsilon_j$. Отсюда

$$\varepsilon_i\,\delta\nu\varepsilon_j = \varepsilon_i\,\delta\varepsilon_j\nu\varepsilon_j = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}\nu_{jj}\varepsilon_j = \delta_{ij}\nu_{jj}\varepsilon_{ij} = \delta_j\nu_{jj}\varepsilon_{ij}.$$

Поэтому, учитывая (111) и лемму 3, будем иметь

$$(\delta\nu)_{ij} = \delta_j\nu_{jj} = \delta_1\lambda_{j1}\lambda_{1j}\zeta = \delta_1\zeta = 1 - \sigma. \qquad (113)$$

Пусть теперь $\tau = 1 - \Pi_l\mu\sigma$. Ввиду предложения 89,а), $\mu\sigma\tau = 0$. Отсюда $(1 - \delta)\sigma\tau \in R\mu\sigma\tau = 0$, т. е. $\sigma\tau = \delta\sigma\tau$. Применяя (112), будем иметь

$$\sigma\tau = \sigma\sigma\tau = \sigma\delta\sigma\tau = 0.$$

Но тогда из предложения 90, а) вытекает, что $\tau\sigma = 0$. Следовательно, если $\chi\mu\sigma = 1 - \tau$, то

$$\chi\mu\sigma = (1 - \tau)\,\sigma = \sigma. \qquad (114)$$

Так как $\varepsilon_k\mu\varepsilon_1 = \mu_{k1}\varepsilon_{k1} = 0$ для всякого $k \neq 1$, а для всякого $k \neq j - 1$, j имеет место $\varepsilon_k\mu\varepsilon_j = \mu_{kj}\varepsilon_{kj} = 0$, то

$$\varepsilon_k\,[\mu\varepsilon_1 - \varepsilon_1\mu\varepsilon_1] = 0$$

и

$$\varepsilon_k\,[\mu\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}\mu\varepsilon_j - \varepsilon_j\mu\varepsilon_j] = 0$$

для любого k. Применяя предложение 93, а), получаем

$$\mu\varepsilon_1 - \varepsilon_1\mu\varepsilon_1 = \mu\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}\mu\varepsilon_j - \varepsilon_j\mu\varepsilon_j = 0. \qquad (115)$$

Используя (108), $\sigma \in D$, (114), (115), $\mu_{jj} = 1$ и $\mu_{j-1\,j} = -1$, будем иметь

$$\sigma\varepsilon_{11} = \varepsilon_1\sigma\varepsilon_1 = \varepsilon_1\chi\mu\varepsilon_1\sigma = \varepsilon_1\chi\varepsilon_1\mu\varepsilon_1\sigma = \chi_{11}\mu_{11}\varepsilon_{11}\sigma = \chi_{11}\sigma\varepsilon_{11},$$

а для $j \neq 1$

$$0 = \varepsilon_1 \varepsilon_j \sigma = \varepsilon_1 \sigma \varepsilon_j \sigma = \varepsilon_1 \chi \mu \varepsilon_j \sigma = [\varepsilon_1 \chi \varepsilon_{j-1} \mu \varepsilon_j + \varepsilon_1 \chi \varepsilon_j \mu \varepsilon_j] \sigma =$$
$$= [\chi_{1\, j-1} \mu_{j-1\, j} \varepsilon_{1\, j-1} \varepsilon_{j-1\, j} + \chi_{1j} \mu_{jj} \varepsilon_{1j} \varepsilon_{jj}] \sigma = [\chi_{1\, j-1} \sigma - \chi_{1j} \sigma] \varepsilon_{1j}.$$

Отсюда, поскольку $\sigma - \chi_{11}\sigma$, $\chi_{1\, j-1}\sigma - \chi_{1j}\sigma \in D$, предложение 97, а) приводит к

$$\sigma = \chi_{11}\sigma = \chi_{12}\sigma = \chi_{13}\sigma = \ldots \qquad (116)$$

Положим $\beta = \delta\nu + \chi\sigma$. Тогда, учитывая (113), $\sigma \in D$ и (116), получаем

$$\varepsilon_1 \beta \varepsilon_j = [(\delta\nu)_{1j} + \chi_{1j}\sigma] \varepsilon_{1j} = (1 - \sigma + \sigma) \varepsilon_{1j} = \varepsilon_{1j},$$

т. е. $\beta_{1j} = 1$, что и требовалось.

Продолжим доказательство теоремы 24.

Согласно лемме 5, в R найдется такой элемент α, что для всех j $\alpha_{1j} = 1$, а при $i \neq 1$ $\alpha_{ij} = 0$. Ясно, что $\alpha \neq 0$. Чтобы получить противоречие, доказывающее теорему, установим, что $\alpha = 0$.

Так как при $k \neq 1$ $\varepsilon_k \alpha \varepsilon_j = \alpha_{kj} \varepsilon_{kj} = 0$, то $\varepsilon_k [\alpha\varepsilon_j - \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_j] = 0$ для всех k. Применяя предложение 93, а), приходим к равенству

$$\alpha\varepsilon_j - \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_j = 0. \qquad (117)$$

Отсюда, учитывая (108), получаем

$$\varepsilon_i \alpha^2 \varepsilon_j = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_j = \alpha_{i1} \alpha_{1j} \varepsilon_{i1} \varepsilon_{1j} = \alpha_{i1} \alpha_{1j} \varepsilon_{ij}.$$

Следовательно, $\varepsilon_1 \alpha^2 \varepsilon_j = \varepsilon_{1j}$, а при $i \neq 1$ $\varepsilon_i \alpha^2 \varepsilon_j = 0$. Отсюда $(\alpha^2)_{ij} = \alpha_{ij}$ и из леммы 4 вытекает

$$\alpha^2 = \alpha. \qquad (118)$$

Применяя (108), получаем

$$\varepsilon_k (\varepsilon_1 \alpha) \varepsilon_l = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq 1, \\ \alpha_{1l} \varepsilon_{1l}, & \text{если } k = 1, \end{cases}$$

и

$$\varepsilon_k (\alpha \varepsilon_i) \varepsilon_l = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq i, \\ \alpha_{ki} \varepsilon_{ki} = 0, & \text{если } k \neq 1,\ l = i, \\ \varepsilon_{1i}, & \text{если } k = 1,\ l = i. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая (108), выводим, что $(\varepsilon_1 \alpha)_{kl} = \alpha_{kl}$ и $(\alpha\varepsilon_i)_{kl} = (\varepsilon_{1i})_{kl}$, что, ввиду леммы 4, дает

$$\varepsilon_1 \alpha = \alpha \qquad (119)$$

и

$$\alpha\varepsilon_i=\varepsilon_{1i}. \tag{120}$$

Применяя (119) и (108), получаем

$$\alpha\varepsilon_{i1}=\varepsilon_1\alpha\varepsilon_i\varepsilon_{i1}=\alpha_{1i}\varepsilon_{1i}\varepsilon_{i1}=\alpha_{1i}\varepsilon_1=\varepsilon_1. \tag{121}$$

Учитывая (108) и $\lambda_{1i}\in D$, будем иметь

$$\varepsilon_i\lambda_{1i}\varepsilon_{i1}\varepsilon_1=\lambda_{1i}\varepsilon_{i1}=\left(\varepsilon^*_{1i}\right)_{i1}\varepsilon_{i1},$$

т. е. $\left(\lambda_{1i}\varepsilon_{i1}\right)_{i1}=\left(\varepsilon^*_{1i}\right)_{i1}$. Так как ε^*_{1i}, $\lambda_{1i}\varepsilon_{i1}\in\varepsilon_iR\varepsilon_1$, то при $k\neq i$ или $l\neq 1$ имеет место $\left(\varepsilon^*_{1i}\right)_{kl}=0=\left(\lambda_{1i}\varepsilon_{i1}\right)_{kl}$. Поэтому лемма 4 дает

$$\varepsilon^*_{1i}=\lambda_{1i}\varepsilon_{i1}. \tag{122}$$

Из (108) и $\lambda_{i1}\in D$ вытекает

$$\varepsilon_1\lambda_{i1}\varepsilon_{1i}\varepsilon_i=\lambda_{i1}\varepsilon_{1i}=\left(\varepsilon^*_{i1}\right)_{1i}\varepsilon_{1i},$$

т. е. $\left(\lambda_{i1}\varepsilon_{1i}\right)_{1i}=\left(\varepsilon^*_{i1}\right)_{1i}$. Поскольку для $k\neq 1$ или $l\neq i$ имеет место $\left(\varepsilon^*_{i1}\right)_{kl}=0=\left(\lambda_{i1}\varepsilon_{1i}\right)_{kl}$, то лемма 4 дает

$$\varepsilon^*_{i1}=\lambda_{i1}\varepsilon_{1i}. \tag{123}$$

Применяя (122), $\lambda_{1i}\in D$ и (121), получим

$$\alpha\varepsilon^*_{1i}=\alpha\lambda_{1i}\varepsilon_{i1}=\alpha\varepsilon_{i1}\lambda_{1i}=\lambda_{1i}\varepsilon_1. \tag{124}$$

Ввиду (121) и (123), $\varepsilon_1=\varepsilon^*_1=\varepsilon^*_{i1}\alpha^*=\lambda_{i1}\varepsilon_{1i}\alpha^*$. Отсюда с помощью леммы 3 получаем

$$\lambda_{1i}\varepsilon_1=\varepsilon_{1i}\alpha^*. \tag{125}$$

Положив $\alpha_n=\alpha(1-\varepsilon_1-\ \ldots\ -\varepsilon_n)$ и учитывая (120), будем иметь

$$\alpha_n=\alpha-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}-\ \ldots\ -\varepsilon_{1n}. \tag{126}$$

Кроме того,

$$\alpha_n\alpha^*_n=\alpha(1-\varepsilon_1-\ \ldots\ -\varepsilon_n)\alpha^*=\alpha_n\alpha^*. \tag{127}$$

Ввиду (120) и (122), из определения α_n вытекает также, что

$$\alpha_n\varepsilon_i=\begin{cases} 0, & \text{если } i\leqslant n,\\ \alpha\varepsilon_i=\varepsilon_{1i}, & \text{если } i>n,\end{cases} \tag{128}$$

а для $i\leqslant n$

$$\alpha_n\varepsilon^*_{1i}=\alpha_n\lambda_{1i}\varepsilon_{i1}=\alpha\left(1-\varepsilon_i\right)\varepsilon_{i1}\lambda_{1i}=0. \tag{129}$$

Положим $\alpha_0 = \alpha$. Тогда для $n \geqslant 0$, используя (127) и (119), получим

$$\alpha_n\alpha_n^* = \alpha\left(1 - \varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_n\right)\alpha^* = \\ = \varepsilon_1\alpha\left(1 - \varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_n\right)\alpha^*\varepsilon_1 \in \varepsilon_1 R\varepsilon_1.$$

Отсюда, в силу предложения 97, в),

$$\alpha_n\alpha_n^* = \mu_n\varepsilon_1, \tag{130}$$

где $\mu_n \in D$. Поэтому применение (127), (126) и (125) приводит к

$$\mu_n\varepsilon_1 = \alpha_n\alpha_n^* = \alpha_n\alpha^* = \left(\alpha - \varepsilon_{11} - \ldots - \varepsilon_{1n}\right)\alpha^* = \\ = \left(\mu_0 - \lambda_{11} - \ldots - \lambda_{1n}\right)\varepsilon_1.$$

Так как μ_i, $\lambda_{1i} \in D$, то из предложения 97, а) вытекает

$$\mu_n = \mu_0 - \lambda_{11} - \ldots - \lambda_{1n}. \tag{131}$$

Если $\xi \in D$ и $\xi\mu_n = 0$, то, учитывая (130), получим

$$\left(\xi\alpha_n\right)\left(\xi\alpha_n\right)^* = \xi\alpha_n\alpha_n^*\xi^* = \xi\mu_n\varepsilon_1\xi^* = 0,$$

откуда $\xi\alpha_n = 0$. Для $i > n$ отсюда и из (128) следует $\xi\varepsilon_{1i} = \xi\alpha_n\varepsilon_i = 0$, что, ввиду предложения 97, а), дает $\xi = 0$.

Если $\eta \in D$ и $\mu_n\eta = 0$, то, ввиду (130),

$$\left(\alpha_n^*\eta\right)^*\left(\alpha_n^*\eta\right) = \eta^*\alpha_n\alpha_n^*\eta = \eta^*\mu_n\varepsilon_1\eta = \eta^*\mu_n\eta\varepsilon_1 = 0,$$

откуда $\alpha_n^*\eta = 0$. Поэтому, учитывая (122) и (128), для $i > n$ будем иметь

$$\lambda_{1i}\eta\varepsilon_{i1} = \lambda_{1i}\varepsilon_{i1}\eta = \varepsilon_{1i}^*\eta = \varepsilon_i\alpha_n^*\eta = 0.$$

Предложение 97, а) показывает, что $\lambda_{1i}\eta = 0$, откуда, в силу леммы 3, $\eta = \lambda_{i1}\lambda_{1i}\eta = 0$. Таким образом, μ_n не является ни правым, ни левым делителем нуля в D. Поскольку из предложений 90, ж) и 97, б) вытекает, что D — регулярное кольцо, то найдется такой элемент $\chi_n \in D$, что $\mu_n\chi_n\mu_n = \mu_n$. Тогда $\mu_n(\chi_n\mu_n - 1) = (\mu_n\chi_n - 1)\mu_n = 0$, откуда

$$\mu_n\chi_n = \chi_n\mu_n = 1. \tag{132}$$

Положим $\beta_0 = \alpha_0$, а при $n \geqslant 1$

$$\beta_n = \varepsilon_{1n} - \lambda_{1n}\chi_{n-1}\alpha_{n-1}. \tag{133}$$

Если $n > l$, то из (122) следует

$$\beta_n \varepsilon_{l1}^* = \varepsilon_{1n}\lambda_{1l}\varepsilon_{l1} - \lambda_{1n}\chi_{n-1}\alpha_{n-1}\varepsilon_{1l}^* = 0. \tag{134}$$

Полагая $\rho_n = (\lambda_{1n}\chi_{n-1})^*$ и применяя (134), (126), (128), (125), (127), (130) и (132), будем при $n > l > 0$ иметь

$$\beta_n\beta_l^* = \beta_n(\varepsilon_{1l}^* - \alpha_{l-1}^*\rho_l) = -[\varepsilon_{1n}(1 - \varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_{l-1})\alpha^* -$$
$$- \rho_n^*\alpha_{n-1}(\alpha^* - \varepsilon_{11}^* - \ldots - \varepsilon_{1\,l-1}^*)]\rho_l = -[\varepsilon_{1n}\alpha^* - \rho_n^*\alpha_{n-1}\alpha^*]\rho_l =$$
$$= -[\lambda_{1n}\varepsilon_1 - \lambda_{1n}\chi_{n-1}\mu_{n-1}\varepsilon_1]\rho_l = 0.$$

Таким образом, $\beta_n\beta_l^* = 0$, если $0 < l < n$. Кроме того, при $n > 0$, ввиду (133), (125), (127), (130) и (132), будем иметь

$$\beta_n\beta_0^* = \varepsilon_{1n}\alpha^* - \lambda_{1n}\chi_{n-1}\alpha_{n-1}\alpha^* = \lambda_{1n}(\varepsilon_1 - \chi_{n-1}\mu_{n-1}\varepsilon_1) = 0.$$

Отсюда при $l > n$ вытекает $(\beta_n\beta_l^*)^* = \beta_l\beta_n^* = 0$. Следовательно, если $i \neq j$, то

$$\beta_i\beta_j^* = 0. \tag{135}$$

Из (108), (128), (132), (131) и $\mu_n\chi_{n-1} \in D$ вытекает

$$\beta_n\varepsilon_{n1} = \varepsilon_1 - \lambda_{1n}\chi_{n-1}\alpha_{n-1}\varepsilon_{n1} = \varepsilon_1 - \lambda_{1n}\chi_{n-1}\varepsilon_{1n}\varepsilon_{n1} =$$
$$= (1 - \lambda_{1n}\chi_{n-1})\varepsilon_1 = (\mu_{n-1} - \lambda_{1n})\chi_{n-1}\varepsilon_1 =$$
$$= (\mu_0 - \lambda_{11} - \ldots - \lambda_{1n})\chi_{n-1}\varepsilon_1 = \mu_n\chi_{n-1}\varepsilon_1 = \varepsilon_1\mu_n\chi_{n-1}.$$

Умножая справа на $\mu_{n-1}\chi_n$ и применяя (132), получим $\beta_n\varepsilon_{n-1}\mu_{n-1}\chi_n = \varepsilon_1$. Так как при $n > 0$ из (133) и (119) следует

$$\varepsilon_1\beta_n = \varepsilon_{1n} - \varepsilon_1\lambda_{1n}\chi_{n-1}\alpha_{n-1} = \varepsilon_{1n} - \lambda_{1n}\chi_{n-1}\alpha_{n-1} = \beta_n,$$

то $\beta_n R = \varepsilon_1 R$, т. е. $\varepsilon_1 = \Pi_r\beta_n$, если $n > 0$. Из (119) и (121) вытекает, что $\varepsilon_1 = \Pi_r\beta_0$. Таким образом, $\varepsilon_1 = \Pi_r\beta_l$ для всех l. Пусть $\delta_l = \Pi_l\beta_l$, $\gamma_l = O(\beta_l)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ Из предложений 89, г) и 87, а) следует, что проекции $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ эквивалентны между собой. Если $i \neq j$, то, применяя (135), получим $\delta_i\delta_j = \delta_i\delta_j^* \in R\beta_i\beta_j^* R = 0$, т. е. система проекций $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ ортогональная. Согласно предложениям 90, г) и 90, ж), проекция $\delta = \underset{0 \leqslant l < \infty}{\mathrm{LUB}}\ \delta_l$ является единицей полного $*$-регулярного кольца $\delta R\delta$. Если $\tilde{\delta}_{ij}$ построены, исходя из последовательности $\delta_0, \delta_1, \ldots$, так же, как ε_{ij} на стр. 145, то, ввиду предложения 97, в), $\delta_0\gamma_0^*\delta_0 = \tilde{\theta}_{00}\tilde{\delta}_{00}$ и $-\delta_0(\gamma_l\lambda_{1l}\chi_{l-1})^*\delta_l = \tilde{\theta}_{0l}\tilde{\delta}_{0l}$, если $l > 0$, где $\tilde{\theta}_{00}$, $\tilde{\theta}_{0l}$ — однозначно определенные элементы из $\widetilde{D}=\{\xi;\ \xi\widetilde{\delta}_{ij}=\widetilde{\delta}_{ij}\xi$ для всех $i,\ j\}$. Лемма 5 позволяет найти такой элемент $\theta^*\in\delta R\delta$, что $\delta_0\theta^*\delta_i=\widetilde{\theta}_{0i}\widetilde{\delta}_{0i}$, $i=0, 1, 2, \ldots$ Тогда $\delta_0\theta^*\delta_0=\delta_0\gamma_0^*\delta_0$, $\delta_0\theta^*\delta_i=-\delta_0(\gamma_i\lambda_{1i}\chi_{i-1})^*\delta_i$, откуда

$$\delta_0\theta\delta_0=\delta_0\gamma_0\delta_0, \tag{136}$$

а при $i>0$

$$\delta_i\theta\delta_0=-\delta_i\gamma_i\lambda_{1i}\chi_{i-1}\delta_0. \tag{137}$$

Из определения $O(\beta_i)$ и предложения 92, а) вытекает

$$\beta_i\gamma_i=\Pi_r\beta_i=\varepsilon_1 \tag{138}$$

и

$$\gamma_i\beta_i=\Pi_i\beta_i=\delta_i. \tag{139}$$

Применяя (139), (138) и предложения 92, а), 92, б) и 89, а), получим

$$\delta_i\gamma_i=\gamma_i\beta_i\gamma_i=\gamma_i\Pi_r\beta_i=\gamma_i\Pi_i\gamma_i=\gamma_i \tag{140}$$

и

$$\beta_i\delta_i=\beta_i\gamma_i\beta_i=\Pi_r\beta_i\cdot\beta_i=\beta_i. \tag{141}$$

Из (141), (136), (140) и (138) вытекает

$$\alpha\theta\delta_0=\beta_0\theta\delta_0=\beta_0\delta_0\theta\delta_0=\beta_0\delta_0\gamma_0\delta_0=\beta_0\gamma_0\delta_0=\varepsilon_1\delta_0. \tag{142}$$

Умножая (137) слева на β_i и учитывая (141) и (138), получим

$$\beta_i\theta\delta_0=-\lambda_{1i}\chi_{i-1}\varepsilon_1\delta_0. \tag{143}$$

Покажем, что для всех $r\geqslant 1$

$$\varepsilon_{1r}\theta\delta_0=0. \tag{144}$$

Действительно, предположим, что $r=1$ или же что для всех $i<r$ соотношение (144) уже доказано. Тогда из (142) вытекает

$$\alpha_0\theta\delta_0=\alpha\theta\delta_0=\varepsilon_1\delta_0, \tag{145}$$

а при $r>1$, согласно (126) и (142), имеем

$$\alpha_{r-1}\theta\delta_0=(\alpha-\varepsilon_{11}-\ \ldots\ -\varepsilon_{1\,r-1})\,\theta\delta_0=\alpha\theta\delta_0=\varepsilon_1\delta_0. \tag{146}$$

Ввиду (133), (145), (146) и (143),

$$\beta_r\theta\delta_0=\varepsilon_{1r}\theta\delta_0-\lambda_{1r}\chi_{r-1}\varepsilon_1\delta_0=\varepsilon_{1r}\theta\delta_0+\beta_r\theta\delta_0,$$

откуда и следует (144). Но тогда $\varepsilon_r\theta\delta_0=\varepsilon_{r1}\varepsilon_{1r}\theta\delta_0=0$ для всех r и, согласно предложению 93, а), $\theta\delta_0=0$. Отсюда, ввиду (145), следует, что $\varepsilon_1\delta_0 = 0$. Наконец, применяя (118), предложение 89, а), (119), (120) и определение δ_0, получаем

$$\alpha = \alpha\alpha = \alpha \cdot \Pi_l\alpha_0 \cdot \Pi_r\alpha_0 \cdot \alpha = \alpha(\varepsilon_1\delta_0)^*\alpha = 0.$$

29. Непрерывность. Сначала докажем несколько свойств произвольных регулярных колец.

Предложение 98. *Пусть R — произвольное регулярное кольцо и Z — его центр. Тогда*:

а) *левый идеал $R\varepsilon$, где $\varepsilon^2 = \varepsilon$, является центральным элементом структуры $\mathfrak{L}(R)$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon \in Z$*;

б) *если R полно и разлагается в полную прямую сумму колец R_α* [1]*, то структура $\mathfrak{L}(R)$ разлагается в прямое произведение структур $\mathfrak{L}(R_\alpha)$* [2];

в) *если структура $\mathfrak{L}(R)$ полна и разлагается в прямое произведение структур L_α, то R является специальной подпрямой суммой колец R_α таких, что $\mathfrak{L}(R_\alpha) = L_\alpha$* [3].

Доказательство. а) Пусть ε — центральный идемпотент и $R\delta$, где $\delta^2 = \delta$, — дополнение идеала $R\varepsilon$. Тогда $\varepsilon R\delta \in R\varepsilon \cap R\delta = 0$, откуда $\varepsilon\delta = \varepsilon\varepsilon\delta = 0$. Поскольку $R\varepsilon + R\delta = R$, то $1 = \lambda\varepsilon + \mu\delta$ для подходящих $\lambda, \mu \in R$. Умножая справа на δ и $1 - \varepsilon$, получим $\delta = \mu\delta$ и $1 - \varepsilon = \mu\delta(1 - \varepsilon) = \mu\delta$ соответственно. Отсюда $\delta = 1 - \varepsilon$. Следовательно, $R\varepsilon$ обладает единственным дополнением, т. е. является центральным элементом структуры $\mathfrak{L}(R)$. Если, наоборот, $R\varepsilon$ — центральный элемент структуры $\mathfrak{L}(R)$, то возьмем в R произвольный элемент ξ и положим $\delta = (1 - \varepsilon) - \varepsilon\xi(1 - \varepsilon)$. Тогда $(1 - \varepsilon)\delta = 1 - \varepsilon$, $\delta(1 - \varepsilon) = \delta$, т. е. $R(1 - \varepsilon) = R\delta$. Из предложения 60 вытекает, что $R\varepsilon = R(1 - \delta)$. Поэтому $\varepsilon = \varepsilon(1 - \delta)$, а значит, $\varepsilon\delta = 0$. Отсюда

$$1 - \varepsilon = (1 - \varepsilon)\delta = \delta,$$

что приводит к $\varepsilon\xi(1 - \varepsilon) = 0$. Следовательно, $\varepsilon\xi = \varepsilon\xi\varepsilon \in R\varepsilon$, т. е. $R\varepsilon$ оказывается правым идеалом, и из предложения 13, з) вытекает, что идемпотент ε центральный.

---

[1]) Под полной прямой суммой $\sum R_\alpha$ колец R_α понимается множество бесконечномерных векторов $\{r_\alpha\}$, где $r_\alpha \in R_\alpha$, а сложение и умножение определяется покомпонентно.

[2]) Биркгоф [1], стр. 8.

[3]) Скажем, что кольцо R разлагается в специальную подпрямую сумму колец $R_\alpha \subset R$, если существует такой изоморфизм θ кольца R в полную прямую сумму колец R_α, что при любом α $\theta(\xi) = \xi$ для всех $\xi \in R_\alpha$.

б) Пусть ε_α — компонента единицы в прямом слагаемом R_α. Тогда ε_α — центральный идемпотент и из а) следует, что $R\varepsilon_\alpha$ — центральный элемент структуры $\mathfrak{L}(R)$. Так как система элементов $\{R\varepsilon_\alpha\}$, очевидно, независима, то $R1 = \dot{\sum} R\varepsilon_\alpha$, что, ввиду предложения 64, и доказывает наше утверждение.

в) Пусть $R\varepsilon_\alpha$, где $\varepsilon_\alpha^2 = \varepsilon_\alpha$, — единица структуры L_α. Тогда, согласно а), ε_α — центральный идемпотент. Поэтому $\theta: \xi \to \{\xi\varepsilon_\alpha\}$ является гомоморфизмом кольца R в полную прямую сумму колец $R\varepsilon_\alpha$. Если $\xi\varepsilon_\alpha = 0$ для всех α, то $R\xi \cap R\varepsilon_\alpha = 0$. Ввиду предложения 64, $R\xi = \sum R\xi \cap R\varepsilon_\alpha = 0$, т. е. $\xi = 0$. Следовательно, θ — изоморфизм. Если $\alpha \neq \beta$, то $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta \in R\varepsilon_\alpha \cap R\varepsilon_\beta = 0$. Поэтому для $\xi \in R\varepsilon_\gamma$ имеет место $\theta(\xi) = \{\xi_\alpha\}$, где $\xi_\alpha = \xi$, если $\alpha = \gamma$, и $\xi_\alpha = 0$, если $\alpha \neq \gamma$. Этим показано, что R является специальной подпрямой суммой колец $R\varepsilon_\alpha$. Если $\alpha \neq \beta$, то $R\varepsilon_\alpha R\varepsilon_\beta = 0$. Поэтому всякий левый идеал кольца $R\varepsilon_\alpha$ является левым идеалом кольца R и, следовательно, можно считать, что $\mathfrak{L}(R_\alpha) = L_\alpha$.

Теорема 25. *Проекции полного $*$-регулярного кольца R образуют непрерывную геометрию* [1]).

Лемма 1. *Если I — левый идеал кольца R, то $I^l = R\sigma$, где σ — центральная проекция.*

Доказательство. Поскольку R полно, то из предложения 89, б) вытекает

$$I^l = \bigcap_{\xi \in I} \xi^l = \bigcap_{\xi \in I} R(1 - \Pi_r\xi).$$

Пусть $\sigma = \bigcap_{\xi \in I} (1 - \Pi_r\xi)$. Ясно, что $R\sigma \subset I^l$. Если $\eta \in I^l$, то $R\eta \subset I^l$, а значит, $\Pi_l\eta \leqslant 1 - \Pi_r\xi$ для всех $\xi \in I$. Отсюда $\Pi_l\eta \leqslant \sigma$, а значит, $\eta \in R\Pi_l\eta \subset R\sigma$. Таким образом, $I^l = R\sigma$. Но левый аннулятор левого идеала, очевидно, является правым идеалом. Поэтому из предложения 13, з) вытекает, что идемпотент σ центральный.

Условимся обозначать через $e(\alpha)$ проекцию, определяющую идеал $e(R\alpha)$ (символ $e(R\alpha)$ определен на стр. 91). По определению $e(\alpha) \geqslant \Pi_l\alpha$. Ввиду предложения 98, а), $e(\alpha)$ — *центральная* проекция.

Лемма 2. *Проекция $e(\alpha)$ является наименьшей среди центральных проекций δ, удовлетворяющих условию $\alpha\delta = \alpha$.*

---

[1]) Kaplansky [4].

Действительно, ввиду предложения 89, а),

$$\alpha e(\alpha)=\alpha\Pi_l\alpha e(\alpha)=\alpha\Pi_l\alpha=\alpha.$$

Если же $\alpha\delta=\alpha$, то $R\alpha\subset R\delta$, т. е. $\Pi_l\alpha\leqslant\delta$. Отсюда, учитывая предложение 98, а), получаем, что $e(\alpha)\leqslant\delta$.

Лемма 3. *$e(\alpha)\perp e(\beta)$ тогда и только тогда, когда* $\alpha R\beta=0$.

В самом деле, если $e(\alpha)\perp e(\beta)$, то $\alpha R\beta\subset e(\alpha)Re(\beta)=0$. Если же $\alpha R\beta=0$, то, согласно лемме 1, $\alpha\in(R\beta)^l=R\sigma$, где σ — центральная проекция. Тогда $\alpha\sigma=\sigma$, и лемма 2 приводит к $e(\alpha)\leqslant\sigma$. С другой стороны, применяя предложение 89, в), получим

$$R\beta\subset(R\beta)^{lr}=(R\sigma)^r=R(1-\sigma),$$

откуда $e(\beta)\leqslant 1-\sigma$. Таким образом,

$$e(\alpha)e(\beta)=e(\alpha)\sigma(1-\sigma)e(\beta)=0.$$

Лемма 4. $(R\alpha)^l=[1-e(\alpha)]R$.

Действительно, $e(\alpha)\perp e(1-e(\alpha))$. Поэтому лемма 3 дает $[1-e(\alpha)]R\alpha=0$, т. е.

$$[1-e(\alpha)]R\subset(R\alpha)^l.$$

Если $\xi\in(R\alpha)^l$, то $\xi R\alpha=0$ и из леммы 3 вытекает, что $e(\xi)\perp e(\alpha)$. Отсюда, применяя предложение 89, б), получим

$$\xi=\xi e(\xi)\in[e(\alpha)]^l=[1-e(\alpha)]R.$$

Лемма 5. *Если $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ и $\delta_1,\ldots,\delta_n$ — ортогональные системы проекций и $\varepsilon_i\backsim\delta_i$, то $\varepsilon=\sum\varepsilon_i\backsim\sum\delta_i=\delta$.*

Действительно, пусть $\xi_i\eta_i=\varepsilon_i$, $\eta_i\xi_i=\delta_i$, $\xi_i\in\varepsilon_iR\delta_i$, $\eta_i\in\delta_iR\varepsilon_i$, $\xi=\sum\xi_i$, $\eta=\sum\eta_i$. Тогда $\xi_i\eta_j\in\varepsilon_iR\delta_i\delta_jR\varepsilon_j=0$, если $i\neq j$. Поэтому

$$\xi\eta=\sum\xi_i\eta_i=\sum\varepsilon_i=\varepsilon$$

и

$$\xi=\sum\xi_i=\sum\varepsilon_i\xi_i\delta_i=\sum\varepsilon\varepsilon_i\xi_i\delta_i\delta\in\varepsilon R\delta.$$

Аналогично проверяется, что $\eta\xi=\delta$, а $\eta\in\delta R\varepsilon$. Следовательно, $\varepsilon\backsim\delta$.

Лемма 6. *Если $\{\varepsilon_\alpha\}$ и $\{\delta_\alpha\}$ — ортогональные системы проекций, $\varepsilon=\mathrm{LUB}\,\varepsilon_\alpha$, $\delta=\mathrm{LUB}\,\delta_\alpha$, $\varepsilon_\alpha\backsim\delta_\alpha$ и $\varepsilon\perp\delta$, то $\varepsilon\backsim\delta$.*

Доказательство. Пусть $\xi_\alpha\eta_\alpha=\varepsilon_\alpha$, $\eta_\alpha\xi_\alpha=\delta_\alpha$, $\xi_\alpha\in\varepsilon_\alpha R\delta_\alpha$, $\eta_\alpha\in\delta_\alpha R\varepsilon_\alpha$, $\tau_\alpha=\varepsilon_\alpha+\delta_\alpha$, $\tau=\varepsilon+\delta$. Ввиду предложения 90, г), $\varepsilon_\alpha=\varepsilon\varepsilon_\alpha\varepsilon$, $\delta_\alpha=\delta\delta_\alpha\delta$. Следовательно, $\varepsilon_\alpha\delta_\beta=\delta_\beta\varepsilon_\alpha=0$. Поэтому τ

и τ_α оказываются проекциями. Кроме того,

$$\xi_\alpha = \varepsilon\xi_\alpha\delta = \tau\varepsilon\xi_\alpha\delta\tau = \tau\xi_\alpha\tau,$$

$$\xi_\alpha\tau_\beta = \xi_\alpha\delta_\alpha(\varepsilon_\beta + \delta_\beta) = \xi_\alpha\delta_\alpha\delta_\beta = \begin{cases} \xi_\alpha, & \text{если} \quad \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

$$\tau_\beta\xi_\alpha = (\varepsilon_\beta + \delta_\beta)\varepsilon_\alpha\xi_\alpha = \varepsilon_\beta\varepsilon_\alpha\xi_\alpha = \begin{cases} \xi_\alpha, & \text{если} \quad \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Таким образом, $\xi_\alpha \in S$, где $S = \{\zeta;\ \zeta \in \tau R\tau,\ \zeta\tau_\beta = \tau_\beta\zeta$ для всех $\beta\}$. Из предложений 90, г), 90, ж) и 93, в) следует, что S — полное $*$-регулярное кольцо. Так как $\xi_\alpha^2 = \xi_\alpha\delta_\alpha\varepsilon_\alpha\xi_\alpha = 0$ и $\xi_\alpha\tau_\alpha = \xi_\alpha\delta_\alpha(\varepsilon_\alpha + \delta_\alpha) = \xi_\alpha$, то предложение 94 позволяет найти такой элемент $\xi \in S$, что $\xi\tau_\alpha = \xi_\alpha$ для всех α. Аналогично устанавливается существование такого элемента $\eta \in S$, что $\eta\tau_\alpha = \eta_\alpha$ для всех α. Так как $\varepsilon \in S$ и $\tau_\alpha(\xi\eta - \varepsilon) = \xi_\alpha\eta_\alpha - \varepsilon_\alpha = 0$ для всех α, то из предложения 93, а) вытекает, что $\xi\eta = \varepsilon$. Применив предложение 93, а) к равенствам $\tau_\alpha(\varepsilon\xi - \xi) = \varepsilon_\alpha\xi_\alpha - \xi_\alpha = 0$ и $\tau_\alpha(\xi\delta - \xi) = \xi_\alpha\delta_\alpha - \xi_\alpha = 0$, убедимся, что $\xi \in \varepsilon R\delta$. Аналогично проверяется, что $\eta\xi = \delta$, а $\eta \in \delta R\varepsilon$. Значит, $\varepsilon \backsim \delta$.

Лемма 7. *Если σ — центральный идемпотент и $\varepsilon \backsim \delta$, то $\sigma\varepsilon \backsim \sigma\delta$.*

Доказательство тривиально.

Лемма 8. *Если проекции ε и δ таковы, что $\varepsilon R\delta \neq 0$, то найдутся такие ненулевые $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ и $\delta' \leqslant \delta$, что $\varepsilon' \backsim \delta'$.*

Доказательство. Пусть $\xi = \varepsilon\xi\delta \neq 0$. Тогда $\delta' = \Pi_l\xi \leqslant \delta$, а, ввиду предложения 89, е), $\varepsilon' = \Pi_r\xi \leqslant \varepsilon$. Остается применить предложение 89, г).

Лемма 9. *Если ε и δ — ортогональные проекции, то найдется такая центральная проекция σ и такие проекции $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ и $\delta' \leqslant \delta$, что $\sigma\varepsilon \backsim \sigma\delta'$ и $(1 - \sigma)\delta \backsim (1 - \sigma)\varepsilon'$.*

Доказательство. Сначала докажем, что найдутся такие эквивалентные проекции $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ и $\delta' \leqslant \delta$, что $(\varepsilon - \varepsilon')R(\delta - \delta') = 0$. Допустим, что это не так. Пусть $\varepsilon_1 = \delta_1 = 0$ и для всех $\beta < \alpha$ построены такие $\varepsilon_\beta \leqslant \varepsilon$ и $\delta_\beta \leqslant \delta$, что $\varepsilon_\beta \neq 0$ при $\beta > 1$, системы $\{\varepsilon_\beta\}$ и $\{\delta_\beta\}$ ортогональны, $\varepsilon_\beta \backsim \delta_\beta$. Рассмотрим $T = \left(\varepsilon - \operatorname{LUB}\limits_{\beta<\alpha} \varepsilon_\beta\right) R \left(\delta - \operatorname{LUB}\limits_{\beta<\alpha} \delta_\beta\right)$. Так как, согласно лемме 6, $\operatorname{LUB}\limits_{\beta<\alpha} \varepsilon_\beta \backsim \operatorname{LUB}\limits_{\beta<\alpha} \delta_\beta$, то из сделанного допущения вытекает, что $T \neq 0$. Поэтому лемма 8 позволяет найти ненулевые эквивалентные $\varepsilon_\alpha \leqslant \varepsilon - \underset{\beta<\alpha}{\mathrm{LUB}}\, \varepsilon_\beta$ и $\delta_\alpha \leqslant \delta - \underset{\beta<\alpha}{\mathrm{LUB}}\, \delta_\beta$. При этом $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha(\varepsilon - \mathrm{LUB}\,\varepsilon_\beta)\,\varepsilon_\gamma = 0$ для всех $\gamma < \alpha$. Точно так же $\delta_\alpha\delta_\gamma = 0$ для всех $\gamma < \alpha$. Таким образом, при сделанном допущении процесс построения ε_α и δ_α может продолжаться безгранично. Так как это невозможно (мощность построенного множества не может превысить мощность кольца R), то элементы ε' и δ' с указанными свойствами найдутся. Тогда, согласно лемме 3, $e(\varepsilon - \varepsilon') \perp e(\delta - \delta')$. Если $\sigma = e(\delta - \delta')$, то из леммы 7 вытекает

$$\sigma\varepsilon = \sigma(\varepsilon - \varepsilon') + \sigma\varepsilon' = \sigma\varepsilon' \infty \sigma\delta'$$

и

$$(1-\sigma)\delta = (1-\sigma)(\delta - \delta') + (1-\sigma)\delta' = (1-\sigma)\delta' \infty (1-\sigma)\varepsilon'.$$

Проекцию, являющуюся D-элементом или правильным элементом структуры проекций, будем называть *D-проекцией* и *правильной проекцией* соответственно.

Лемма 10. *Если ε — правильная проекция и $\delta \leqslant \varepsilon$, то $\delta = \varepsilon e(\delta)$.*

Для доказательства положим $\xi = \varepsilon e(\delta) - \delta$. Тогда $\xi\delta = \varepsilon\delta - \delta = 0$ и $\xi\varepsilon = \varepsilon e(\delta) - \delta = \xi$. Кроме того, из предложений 90, г), 90, ж) и 98, а) следует, что δ — центральный элемент кольца $\varepsilon R\varepsilon$. Поэтому $\xi R\delta = \xi\varepsilon R\varepsilon\delta = \xi\,\delta\varepsilon R\varepsilon = 0$. По лемме 3 $e(\xi) \perp e(\delta)$. Но $e(\delta)\,\xi = \xi$, т. е. $e(\xi) \leqslant e(\delta)$. Отсюда $e(\xi) = 0$, т. е. $\xi = 0$.

Лемма 11. *Если ε и δ — эквивалентные идемпотенты, $\varepsilon = \xi\eta$, $\delta = \eta\xi$, $\xi \in \varepsilon R\delta$, $\eta \in \delta R\varepsilon$, $\varepsilon'^2 = \varepsilon'$, $R\varepsilon' \subset R\varepsilon$ и $\delta' = \eta\varepsilon'\xi$, то $\delta'^2 = \delta'$, $R\delta' \subset R\delta$, $\varepsilon' \infty \delta'$, $\varepsilon - \varepsilon\varepsilon' \infty \delta - \delta\delta'$ и $\delta\delta' = \delta'$. Если $R\varepsilon' \neq R\varepsilon$, то $R\delta' \neq R\delta$.*

Доказательство. Ясно, что $\delta\delta' = \delta\eta\varepsilon'\xi = \eta\varepsilon'\xi = \delta'$. Положим $\xi' = \varepsilon'\xi$, $\eta' = \eta\varepsilon'$, $\varepsilon'' = \varepsilon - \varepsilon\varepsilon'$, $\delta'' = \delta - \delta\delta'$, $\xi'' = \varepsilon''\xi$, $\eta'' = \eta\varepsilon''$. Тогда

$$\xi'\eta' = \varepsilon'\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon', \quad \eta'\xi' = \eta\varepsilon'\xi = \delta',$$

$$\delta'^2 = \eta\varepsilon'\xi\eta\varepsilon'\xi = \eta\varepsilon'\varepsilon\varepsilon'\xi = \delta',$$

$$\xi' = \varepsilon'\xi = \varepsilon'\xi\eta\varepsilon'\xi = \varepsilon'\xi\delta' \in \varepsilon' R\delta',$$

$$\eta' = \eta\varepsilon' = \eta\varepsilon'\xi\eta\varepsilon' = \delta'\eta\varepsilon' \in \delta' R\varepsilon',$$

т. е. $\varepsilon' \infty \delta'$. Далее,

$$\varepsilon''^2 = \varepsilon - \varepsilon\varepsilon' - \varepsilon\varepsilon'\varepsilon + \varepsilon\varepsilon'\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon''$$

и точно так же $\delta''^2=\delta''$, ибо $\delta'\delta=\eta\varepsilon'\xi\delta=\delta'$. Используя

$$\varepsilon''\varepsilon'=\varepsilon\varepsilon'-\varepsilon\varepsilon'=0=\varepsilon'\varepsilon-\varepsilon'\varepsilon\varepsilon'=\varepsilon'\varepsilon'',$$

получаем

$$\varepsilon''\xi\delta\delta'=\varepsilon''\xi\eta\varepsilon'\xi=\varepsilon''\varepsilon\varepsilon'\xi=0,\qquad \delta\delta'\eta\varepsilon''=\delta\eta\varepsilon'\xi\eta\varepsilon''=\delta\eta\varepsilon'\varepsilon\varepsilon''=0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\xi''\eta''&=\varepsilon''\xi\eta\varepsilon''=\varepsilon''\varepsilon\varepsilon''=\varepsilon'',\\ \eta''\xi''&=\eta\varepsilon''\xi=\eta\varepsilon\xi-\delta\eta\varepsilon\varepsilon'\xi=\delta-\delta\delta'=\delta'',\\ \xi''&=\varepsilon''\xi=\varepsilon''\xi(\delta-\delta\delta')=\varepsilon''\xi\delta''\in\varepsilon''R\delta'',\\ \eta''&=\eta\varepsilon''=(\delta-\delta\delta')\eta\varepsilon''=\delta''\eta\varepsilon''\in\delta''R\varepsilon'',\end{aligned}$$

т. е. $\varepsilon''\infty\delta''$. Ясно, что $R\delta'$, $R\delta''\subset R\delta$. Если $R\delta'=R\delta$, то $\delta=\delta\delta'$. Но тогда $\delta''=0$. Отсюда, ввиду предложения 87, г), $\varepsilon''=0$, т. е. $R\varepsilon\subset R\varepsilon'$.

Лемма 12. *Если* $\varepsilon\geqslant\delta$ *и* $\varepsilon\infty\delta$, *то* $\varepsilon=\delta$.

Доказательство. Если $\varepsilon>\delta$, то положим $\delta_0=\varepsilon$, $\delta_1=\delta$, $\rho_1=\varepsilon-\delta$. Допустим, что построены система эквивалентных идемпотентов $\delta_0,\ldots,\delta_n$ и ортогональная система эквивалентных проекций $\rho_1,\ldots,\rho_n$ такие, что $R\delta_i\underset{\neq}{\subset}R\delta_{i-1}$ и $\rho_i=\Pi_l(\delta_{i-1}-\delta_{i-1}\delta_i)$. Ввиду леммы 11, найдется такой идемпотент δ_{n+1}, что $\delta_{n+1}\infty\delta_n$, $R\delta_{n+1}\underset{\neq}{\subset}R\delta_n$, $\delta_n-\delta_n\delta_{n+1}\infty\delta_{n-1}-\delta_{n-1}\delta_n$. Положив $\rho_{n+1}=\Pi_l(\delta_n-\delta_n\delta_{n+1})$ и учитывая предложения 87, а) и 87, в), будем иметь

$$\rho_{n+1}\infty\delta_n-\delta_n\delta_{n+1}\infty\delta_{n-1}-\delta_{n-1}\delta_n\infty\rho_n.$$

Если $i\leqslant n$, то, учитывая предложения 89, а) и 89, д), получаем

$$\begin{aligned}\rho_{n+1}\rho_i&=\rho_{n+1}(\delta_n-\delta_n\delta_{n+1})(\delta_{i-1}-\delta_{i-1}\delta_i)\rho_i=\\ &=\rho_{n+1}(\delta_n\delta_{i-1}-\delta_n\delta_{n+1}\delta_{i-1}-\delta_n\delta_{i-1}\delta_i+\delta_n\delta_{n+1}\delta_{i-1}\delta_i)\rho_i=0.\end{aligned}$$

Так как процесс построения ρ_i может продолжаться бесконечно, то мы вступаем в противоречие с теоремой 24.

Лемма 13. *Если $\delta_1,\ldots,\delta_n$ — ортогональная система правильных эквивалентных проекций и $1=\sum\delta_i$, то никакая ортогональная система ненулевых эквивалентных проекций не может содержать более чем n элементов.*

Действительно, пусть $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n+1}$ — ортогональная система ненулевых эквивалентных проекций. Если $\delta_1R\varepsilon_1=0$, то, согласно лемме 3, $e(\varepsilon_1)=e(\delta_1)e(\varepsilon_1)=0$, т. е. $\varepsilon_1=0$. Следовательно, $\delta_1R\varepsilon_1\neq0$. Ввиду леммы 8, найдутся такие ненулевые эквивалентные проекции $\delta' \leqslant \delta_1$ и $\varepsilon'_1 \leqslant \varepsilon_1$, что $\delta' \infty \varepsilon'_1$. Лемма 11 и предложения 89, д) и 87, а) позволяют найти такие проекции $\varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_{n+1}$, что $\varepsilon'_i \leqslant \varepsilon_i$ и $\varepsilon'_i \infty \delta'$ для $i=1, 2, \ldots, n+1$. Но по лемме 10 $\delta' = \sigma\delta_1$, где $\sigma = e(\delta')$. Из леммы 7 следует, что

$$\sigma\delta_i \infty \sigma\delta_1 = \sigma\delta' \infty \sigma\varepsilon'_i.$$

Так как при $i \neq j$ $\sigma\delta_i \perp \sigma\delta_j$ и $\sigma\varepsilon_i \perp \delta\varepsilon_j$, то из леммы 5 вытекает

$$\sigma = \sum_1^n \sigma\delta_i \infty \sum_1^n \sigma\varepsilon'_i < \sum_1^{n+1} \sigma\varepsilon_i \leqslant \sigma,$$

что противоречит лемме 12.

Полное $*$-регулярное кольцо назовем *полудистрибутивным* или *антидистрибутивным*, если соответствующим свойством обладает его структура проекций. Полное $*$-регулярное кольцо называется *n-однородным*, если $1 = \delta_1 + \ldots + \delta_n$, где $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — ортогональная система эквивалентных правильных проекций.

Лемма 14. *Если R полудистрибутивно, то оно является специальной подпрямой суммой n-однородных колец.*

Доказательство. Ясно, что отношение ортогональности обладает свойствами $\perp 1$ и $\perp 2$. Если $\varepsilon \perp \delta$ и $(\varepsilon \cup \delta) \perp \rho$, то из предложения 90, а) вытекает, что $\varepsilon(\delta \cup \rho) = \varepsilon(\delta + \rho) = 0$, т. е. ортогональность обладает свойством $\perp 3$. Очевидно также, что для ортогональности выполняется условие А. Из предложения 90, е) и теоремы 24 следует, что ортогональность удовлетворяет условию Д. Теперь наше утверждение следует из теоремы 14 и предложения 98, в), если принять во внимание предложения 90, а, 68, б) и 90, е).

Лемма 15. *Если R n-однородно и $\{\varepsilon_\alpha\}$ — ортогональная система проекций, то $1 = \mathrm{LUB}\sigma_\beta$, где σ_β — центральные проекции, каждая из которых аннулирует почти все ε_α.*

Доказательство. Пусть $\sigma_0 = 0$ и для всех $\gamma < \beta$ построены ортогональные между собой центральные проекции σ_γ, причем $\sigma_\gamma \neq 0$, если $\gamma \neq 0$, и каждое из σ_γ аннулирует почти все ε_α. Пусть $\sigma = \mathrm{LUB}_{\gamma<\beta}\, \sigma_\gamma$ и $\left\{\varepsilon_{\alpha_1}, \ldots, \varepsilon_{\alpha_k}\right\}$ — максимальная система ортогональных проекций из $R(1-\sigma)$, допускающая существование ненулевых эквивалентных проекций $\varepsilon'_i \leqslant \varepsilon_{\alpha_i}$. Ввиду леммы 13, $k \leqslant n$. Пусть $\sigma_\beta = e(\varepsilon'_1)$. Так как $\varepsilon'_1 \leqslant 1 - \sigma$, то

$\sigma_\beta \leqslant 1-\sigma$. Если $\gamma \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и $\varepsilon_\gamma(1-\sigma)R\varepsilon_1' \neq 0$, то леммы 8 и 11 позволяют расширить систему $\{\varepsilon_{\alpha_1}, \ldots, \varepsilon_{\alpha_k}\}$. Следовательно, $\varepsilon_\gamma(1-\sigma)R\varepsilon_1'=0$ и по лемме 4

$$\varepsilon_\gamma(1-\sigma) \in (R\varepsilon_1')^l = (1-\sigma_\beta)R.$$

Отсюда $\varepsilon_\gamma(1-\sigma)\sigma_\beta=0$, т. е. $\varepsilon_\gamma\sigma_\beta=0$ для всех $\gamma \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Остается продолжить по трансфинитам.

Лемма 16. *Если R антидистрибутивно, то для всякой ненулевой проекции ε найдутся такие ненулевые эквивалентные проекции $\varepsilon', \varepsilon'' \leqslant \varepsilon$, что $\varepsilon' \perp \varepsilon''$.*

Действительно, антидистрибутивность, предложение 90, г) и предложение 98, а) позволяют найти такую проекцию $\delta \leqslant \varepsilon$, что $\delta\xi \neq \xi\delta$ для некоторого $\xi \in \varepsilon R\varepsilon$. Поэтому равенства

$$\delta\xi(\varepsilon-\delta) = \delta\xi - \delta\xi\delta = 0$$

и

$$\delta\xi^*(\varepsilon-\delta) = [(\varepsilon-\delta)\xi\delta]^* = (\xi\delta-\delta\xi\delta)^* = 0$$

не могут иметь место одновременно. Следовательно, $\delta R(\varepsilon-\delta) \neq 0$ и лемма 8 обеспечивает существование искомых ε' и ε''.

Лемма 17. *Если R антидистрибутивно, то для всякой проекции ρ найдутся такие ортогональные эквивалентные проекции ε и δ, что $\rho=\varepsilon+\delta$.*

Доказательство. Ввиду предложений 90, г) и 90, ж), можно считать, что $\rho=1$. Лемма 16 позволяет найти такие ненулевые проекции ε_1 и δ_1, что $\varepsilon_1 \backsim \delta_1$ и $\varepsilon_1 \perp \delta_1$. Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ построены такие ненулевые проекции ε_β и δ_β, что $\varepsilon_\beta \backsim \delta_\beta$, $\varepsilon_\beta \perp \delta_\beta$, а система $\{\varepsilon_\gamma+\delta_\gamma, \gamma \leqslant \beta\}$ ортогональна.

Если

$$\rho' = 1 - \underset{\beta<\alpha}{\mathrm{LUB}}(\varepsilon_\beta+\delta_\beta) \neq 0,$$

то, согласно лемме 16, найдутся такие ненулевые проекции $\varepsilon_\alpha \leqslant \rho'$ и $\delta_\alpha \leqslant \rho'$, что $\varepsilon_\alpha \backsim \delta_\alpha$ и $\varepsilon_\alpha \perp \delta_\alpha$. Ясно, что множество $\{\varepsilon_\beta+\delta_\beta, \beta \leqslant \alpha\}$ ортогонально. Для некоторого трансфинита Ω будем иметь $\underset{\alpha<\Omega}{\mathrm{LUB}}(\varepsilon_\alpha+\delta_\alpha)=1$. Пусть $\varepsilon = \underset{\alpha<\Omega}{\mathrm{LUB}}\,\varepsilon_\alpha$, $\delta = \underset{\alpha<\Omega}{\mathrm{LUB}}\,\delta_\alpha$. Из предложения 93, а) легко вывести, что $\varepsilon \perp \delta$. Поэтому лемма 6 дает, что $\varepsilon \backsim \delta$, а из предложения 90, а) вытекает

$$\varepsilon+\delta=\varepsilon \cup \delta=\operatorname*{LUB}_{\alpha<\Omega}\varepsilon_\alpha \cup \operatorname*{LUB}_{\alpha<\Omega}\delta_\alpha=\operatorname*{LUB}_{\alpha<\Omega}(\varepsilon_\alpha \cup \delta_\alpha)=$$
$$=\operatorname*{LUB}_{\alpha<\Omega}(\varepsilon_\alpha+\delta_\alpha)=1.$$

Лемма 18. *Если* $\varepsilon \backsim \delta$ *и* $\varepsilon=\sum_1^{2^n}\varepsilon_i$, *где* $\{\varepsilon_i\}$ — *ортогональная система эквивалентных проекций, то* $\delta=\sum_1^{2^n}\delta_i$, *где* $\delta_i \backsim \varepsilon_i$, *а система проекций* $\{\delta_i\}$ *ортогональна.*

Доказательство. Для $n=0$ утверждение очевидно. Если оно верно для $n-1$, то положим

$$\varepsilon'=\sum_1^{2^{n-1}}\varepsilon_i \quad \text{и} \quad \varepsilon''=\sum_{2^{n-1}+1}^{2^n}\varepsilon_i.$$

Лемма 11 позволяет найти такой идемпотент ρ, что $\delta'=\mathrm{II}_l\rho\leqslant\delta$, $\rho\backsim\varepsilon'$, $\delta-\delta\rho\backsim\varepsilon-\varepsilon\varepsilon'=\varepsilon''$, $\delta\rho=\rho$. Пусть $\delta''=\mathrm{II}_l(\delta-\delta\rho)$. Ввиду предложения 89, з), $\delta=\delta'+\delta''$. Так как из предложений 89, д) и 87, а) следует, что $\delta'\backsim\varepsilon'$, а $\delta''\backsim\varepsilon''$, то, в силу индуктивного предположения, $\delta'=\sum_1^{2^{n-1}}\delta_i$, $\delta''=\sum_{2^{n-1}+1}^{2^n}\delta_i$, где $\delta_i\backsim\varepsilon_i$, $i=1, 2, \ldots, 2^n$, а системы проекций $\{\delta_i,\ 1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}\}$ и $\{\delta_i,\ 2^{n-1}<i\leqslant 2^n\}$ ортогональны. Поскольку $\delta'\delta''=\delta'\rho(\delta-\rho)\delta''=0$, то ортогональной оказывается и система $\{\delta_i,\ 1\leqslant i\leqslant 2^n\}$.

Лемма 19. *Если R антидистрибутивно, то для каждой проекции* ε *найдутся такие ортогональные эквивалентные проекции* ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, *что* $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$.

Доказательство. Ввиду леммы 17, $\varepsilon=\varepsilon'+\varepsilon''$, где $\varepsilon'\backsim\varepsilon''$, $\varepsilon'\perp\varepsilon''$, и $\varepsilon'=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, где $\varepsilon_1\backsim\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$. Лемма 18 позволяет найти проекции ε_3 и ε_4 такие, что $\varepsilon''=\varepsilon_3+\varepsilon_4$, $\varepsilon_3\backsim\varepsilon_1$, $\varepsilon_4\backsim\varepsilon_2$, $\varepsilon_3\perp\varepsilon_4$. Остается применить предложение 87, а).

Лемма 20. *Если* $\{\varepsilon_\alpha\}$ *и* $\{\delta_\alpha\}$ — *ортогональные системы проекций,* $\varepsilon=\mathrm{LUB}\,\varepsilon_\alpha$, $\delta=\mathrm{LUB}\,\delta_\alpha$, $\varepsilon_\alpha\backsim\delta_\alpha$, *то* $\varepsilon\backsim\delta$.

Доказательство. Заметим, что теорема 11, предложение 98, в) и лемма 14 позволяют считать R n-однородным или антидистрибутивным. В первом случае лемма 20 сразу вытекает из предложения 98, в) и лемм 15 и 5, так что можно считать, что R антидистрибутивно.

Допустим сначала, что существует такая проекция ρ, что $\varepsilon \infty \rho$ и $\delta \perp \rho$. Пусть $\varepsilon = \xi\eta$, $\rho = \eta\xi$, $\xi \in \varepsilon R\rho$, $\eta \in \rho R\varepsilon$, $\varepsilon^\alpha = \mathrm{LUB}_{\beta<\alpha}\varepsilon_\beta$, $\rho^\alpha = \Pi_l(\eta\varepsilon^\alpha\xi)$, $\rho_\alpha = \rho^{\alpha+1} - \rho^\alpha$. Ввиду леммы 11 и предложения 89, д), $\varepsilon^\alpha \infty \rho^\alpha$. Еще раз используя лемму 11 и учитывая, что, в силу предложения 90, а), $\varepsilon^\alpha = \varepsilon^{\alpha+1} = \varepsilon_\alpha$, придем к $\varepsilon_\alpha \infty \rho_\alpha$, а значит, и к $\delta_\alpha \infty \rho_\alpha$. Кроме того, при $\alpha > \beta$ имеем $\rho_\alpha\rho_\beta = (\rho^{\alpha+1} - \rho^\alpha)\rho_\beta = 0$. Поэтому, применяя лемму 6, получим $\rho \infty \delta$, а значит, $\varepsilon \infty \delta$.

Далее допустим, что существуют такие проекции ε^{I}, $\varepsilon^{\mathrm{II}}$, $\varepsilon^{\mathrm{III}}$, δ^{I}, δ^{II} и δ^{III}, что $\varepsilon^i \infty \varepsilon$, $\delta^i \infty \delta$, $i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$, а системы $\{\varepsilon, \varepsilon^{\mathrm{I}}, \varepsilon^{\mathrm{II}}, \varepsilon^{\mathrm{III}}\}$ и $\{\delta, \delta^{\mathrm{I}}, \delta^{\mathrm{II}}, \delta^{\mathrm{III}}\}$ ортогональны. Положим $\rho = \varepsilon \cup \delta - \delta$. Согласно лемме 9, $\sigma\rho \infty \sigma\bar{\delta}$, $(1-\sigma)\delta \infty (1-\sigma)\bar{\rho}$, где σ — центральная проекция, $\bar{\delta} \leqslant \delta$, $\bar{\rho} \leqslant \rho$. Ввиду предложения 90, д), $\rho \infty \varepsilon - \varepsilon \cap \delta \leqslant \varepsilon$. Из лемм 7 и 11 вытекает $(1-\sigma)\delta \infty (1-\sigma)\pi$, где $\pi \leqslant \varepsilon^{\mathrm{I}}$. Так как $(1-\sigma)\varepsilon \perp (1-\sigma)\pi$, то по доказанному выше

$$(1-\sigma)\varepsilon \infty (1-\sigma)\delta. \tag{147}$$

Полагая $\tau = \sigma - \sigma\varepsilon \cup \sigma\delta$ и применяя лемму 9, будем иметь $\sigma'\tau \infty \sigma'\bar{\theta}$, $(1-\sigma)\sigma\delta \infty (1-\sigma')\bar{\tau}$, где σ' — центральная проекция, $\bar{\theta} \leqslant \sigma\delta$, $\bar{\tau} \leqslant \tau$. Поскольку $(1-\sigma')\sigma\varepsilon \perp (1-\sigma')\bar{\tau}$, то, как и выше,

$$(1-\sigma')\sigma\varepsilon \infty (1-\sigma')\sigma\delta. \tag{148}$$

Если $\sigma'\sigma\delta = 0$, то $\sigma'\sigma\delta_\alpha = 0$, откуда, ввиду леммы 7 и предложения 87, г), $\sigma'\sigma\varepsilon_\alpha = 0$. Предложение 93, а) дает $\sigma'\sigma\varepsilon = 0$, и (148) приводит к $\sigma\varepsilon \infty \sigma\delta$, что вместе с (147) и леммой 5 обеспечивает $\varepsilon \infty \delta$. Если же $\sigma'\sigma\delta \neq 0$, то

$$\lambda = \sigma'\sigma\delta + \sigma'\sigma\delta^{\mathrm{I}} + \sigma'\sigma\delta^{\mathrm{II}} + \sigma'\sigma\delta^{\mathrm{III}} > \lambda^{\mathrm{I}} + \lambda^{\mathrm{II}} + \lambda^{\mathrm{III}}$$

для любых $\lambda^i \leqslant \sigma'\sigma\delta^i$, $i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$. Леммы 7 и 11 позволяют выбрать $\lambda^{\mathrm{I}} \infty \sigma'\tau$, $\lambda^{\mathrm{II}} \infty \sigma'\sigma\rho$ и $\lambda^{\mathrm{III}} \infty \sigma'\sigma\delta$. Кроме того,

$$\tau\rho\sigma = (\sigma - \sigma\varepsilon \cup \sigma\delta)(\sigma(\varepsilon \cup \delta) - \sigma\delta) = \sigma(\varepsilon \cup \delta) - \sigma\delta - \sigma(\varepsilon \cup \delta) + \sigma\delta = 0,$$

$$\tau\delta\sigma = (\sigma - \sigma\varepsilon \cup \sigma\delta)\delta\sigma = \sigma\delta - \sigma\delta = 0$$

и

$$\rho\delta = (\varepsilon \cup \delta - \delta)\delta = 0.$$

Поэтому из леммы 5 вытекает

$$\lambda^{I}+\lambda^{II}+\lambda^{III}\infty\sigma'\tau+\sigma'\sigma\rho+\sigma'\sigma\delta=$$
$$=\sigma'\tau+\sigma'(\sigma\varepsilon\cup\sigma\delta)=\sigma'\sigma\geqslant\lambda>\lambda^{I}+\lambda^{II}+\lambda^{III},$$

что противоречит лемме 12.

В общем случае, воспользовавшись леммой 19, запишем $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\alpha^{I}+\varepsilon_\alpha^{II}+\varepsilon_\alpha^{III}+\varepsilon_\alpha^{IV}$, где $\{\varepsilon_\alpha^{I}, \varepsilon_\alpha^{II}, \varepsilon_\alpha^{III}, \varepsilon_\alpha^{IV}\}$ — ортогональная система эквивалентных проекций. Пусть $\varepsilon^{l}=\mathrm{LUB}\varepsilon_\alpha^{l}$, $l=\mathrm{I, II, III, IV}$. Из предложения 93, а) нетрудно вывести, что система $\{\varepsilon^{I}, \varepsilon^{II}, \varepsilon^{III}, \varepsilon^{IV}\}$ ортогональна. Поэтому из леммы 6 вытекает, что проекции ε^{I}, ε^{II}, ε^{III}, ε^{IV} эквивалентны между собой. Ясно, что $\varepsilon=\varepsilon^{I}+\varepsilon^{II}+\varepsilon^{III}+\varepsilon^{IV}$. Ввиду леммы 18, $\delta_\alpha=\delta_\alpha^{I}+\delta_\alpha^{II}+\delta_\alpha^{III}+\delta_\alpha^{IV}$, где $\{\delta_\alpha^{I}, \delta_\alpha^{II}, \delta_\alpha^{III}, \delta_\alpha^{IV}\}$ —ортогональная система проекций, причем $\delta_\alpha^{k}\infty\varepsilon_\alpha^{k}$, $k=\mathrm{I, II, III, IV}$. Ясно, что $\delta=\delta^{I}+\delta^{II}+\delta^{III}+\delta^{IV}$, причем предложение 93, а) обеспечивает ортогональность системы $\{\delta^{I}, \delta^{II}, \delta^{III}, \delta^{IV}\}$. Из показанного в предыдущем абзаце вытекает, что $\delta^{k}\infty\varepsilon^{k}$, $k=\mathrm{I}$, II, III, IV. Поэтому лемма 5 приводит к $\varepsilon\infty\delta$.

Лемма 21. *Для любых проекций* ε *и* δ *найдется такая центральная проекция* σ *и такие проекции* $\varepsilon'\leqslant\varepsilon$ *и* $\delta'\leqslant\delta$, *что* $\sigma\varepsilon\infty\sigma\delta'$ *и* $(1-\sigma)\varepsilon'\infty(1-\sigma)\delta$.

Для доказательства следует дословно повторить рассуждения, использованные для доказательства леммы 9, заменив ссылку на лемму 6 ссылкой на лемму 20.

Лемма 22. *Если* $\varepsilon\geqslant\varepsilon'$, $\delta\geqslant\delta'$, $\varepsilon\infty\delta$, $\varepsilon'\infty\delta'$, *то* $\varepsilon''=\varepsilon-\varepsilon'\infty\delta-\delta'=\delta''$.

В самом деле, воспользовавшись леммой 21, запишем $\sigma\varepsilon''\infty\sigma\delta_1$, $(1-\sigma)\sigma''\infty(1-\sigma)\varepsilon_1$, где σ—центральная проекция, $\delta_1\leqslant\delta''$, $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon''$. Применяя леммы 7 и 5, получаем

$$\sigma\delta\infty\sigma\varepsilon=\sigma\varepsilon'+\sigma\varepsilon''\infty\sigma\delta'+\sigma\delta_1$$

и

$$(1-\sigma)\varepsilon\infty(1-\sigma)\delta=$$
$$=(1-\sigma)\delta'+(1-\sigma)\delta''\infty(1-\sigma)\varepsilon'+(1-\sigma)\varepsilon_1.$$

Ввиду леммы 12, $\sigma\delta=\sigma(\delta'+\delta_1)$ и $(1-\sigma)\varepsilon=(1-\sigma)(\varepsilon'+\varepsilon_1)$. Отсюда $\sigma\delta''=\sigma\delta_1$ и $(1-\sigma)\varepsilon''=(1-\sigma)\varepsilon_1$. Применяя лемму 5, будем иметь

$$\varepsilon''=\sigma\varepsilon''+(1-\sigma)\varepsilon''\infty\sigma\delta''+(1-\sigma)\delta''=\delta''.$$

Лемма 23. *Если* $\{\varepsilon_\alpha, \alpha<\Omega\}$*—возрастающая цепь проекций,* $\varepsilon=\mathrm{LUB}\varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_\alpha\infty\delta_\alpha\leqslant\tau$, то $\varepsilon\infty\pi$ *для некоторого* $\pi\leqslant\tau$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что предельных α имеем $\varepsilon_\alpha = \underset{\beta<\alpha}{\mathrm{LUB}}\,\varepsilon_\beta$. Положим $\tau_1 = \delta_1$ и допустим, что для всех $\beta < \alpha$ построены $\tau_\beta \leqslant \tau$ такие, что $\tau_\beta \infty \varepsilon_\beta$, $\beta' < \beta''$ влечет $\tau_{\beta'} \leqslant \tau_{\beta''}$ и $\tau_{\beta'} = \underset{\gamma<\beta'}{\mathrm{LUB}}\,\tau_\gamma$ для предельных β'. Если $\alpha - 1$ существует, то из лемм 11 и 22 вытекает, что

$$\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha-1} \infty \delta_\alpha - \rho_{\alpha-1} \leqslant \tau - \rho_{\alpha-1},$$

где $\rho_{\alpha-1} \leqslant \delta_\alpha$. Кроме того, лемма 22 дает $\tau - \rho_{\alpha-1} \infty \tau - \tau_{\alpha-1}$. Лемма 11 позволяет найти такую проекцию $\rho \leqslant \tau - \tau_{\alpha-1}$, что $\rho \infty \varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha-1}$. Положив $\tau_\alpha = \tau_{\alpha-1} + \rho$ и применяя лемму 5, будем иметь

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha-1} + (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha-1}) \infty \tau_{\alpha-1} + \rho = \tau_\alpha \leqslant \tau.$$

Если α — предельное, то положим $\varepsilon' = \varepsilon_1 + \underset{\beta<\alpha}{\mathrm{LUB}}\,(\varepsilon_{\beta+1} - \varepsilon_\beta)$. Ясно, что $\varepsilon_\alpha = \underset{\beta<\alpha}{\mathrm{LUB}}\,\varepsilon_\beta \geqslant \varepsilon'$ и $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon'$. Допустим, что для всех $\mu < \lambda < \alpha$ показано, что $\varepsilon_\mu \leqslant \varepsilon'$. Если $\lambda - 1$ существует, то $\varepsilon_\lambda = (\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda-1}) + \varepsilon_{\lambda-1} \leqslant \varepsilon'$. Если же λ — предельное, то $\varepsilon_\lambda = \underset{\mu<\lambda}{\mathrm{LUB}}\,\varepsilon_\mu$ и $\varepsilon_\mu(1 - \varepsilon') = 0$. Ввиду предложения 93, а), $\varepsilon_\lambda(1 - \varepsilon') = 0$, т. е. $\varepsilon_\lambda \leqslant \varepsilon'$. Таким образом,

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 + \underset{\beta<\alpha}{\mathrm{LUB}}\,(\varepsilon_{\beta+1} - \varepsilon_\beta).$$

Аналогично проверяется, что

$$\tau_\alpha = \tau_1 + \underset{\beta<\alpha}{\mathrm{LUB}}\,(\tau_{\beta+1} - \tau_\beta).$$

Применяя лемму 20, получаем, что $\varepsilon_\alpha \infty \tau_\alpha$. Если Ω — непредельное, то справедливость леммы очевидна. Если же Ω — предельное, то $\varepsilon = \varepsilon_\Omega$, и в качестве π можно взять элемент τ_Ω.

Доказательство теоремы 25. Пусть $\{\varepsilon_\alpha, \alpha < \Omega\}$ — возрастающая последовательность проекций, $\varepsilon = \mathrm{LUB}\,\varepsilon_\alpha$, $\rho = \mathrm{LUB}\,(\varepsilon_\alpha \cap \delta)$, $\tau = \varepsilon \cap \delta - \rho$, $\tau_\alpha = (\varepsilon \cap \delta) \cup \varepsilon_\alpha$. Ввиду предложения 90, д),

$$\tau \leqslant \varepsilon \cap \delta - \varepsilon_\alpha \cap \delta = \varepsilon \cap \delta - (\varepsilon \cap \delta) \cap \varepsilon_\alpha \infty (\varepsilon \cap \delta) \cup \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha \leqslant \varepsilon - \varepsilon_\alpha.$$

Применяя лемму 21, получим

$$\sigma\varepsilon_\alpha \infty \sigma\pi', \; (1 - \sigma)(\varepsilon - \tau) \infty (1 - \sigma)\pi''_\alpha,$$

где σ — центральная проекция, $\pi' \leqslant \varepsilon - \tau$, $\pi''_\alpha \leqslant \varepsilon_\alpha$. Из лемм 7, 5 и 11 вытекает

$$(1-\sigma)\varepsilon = (1-\sigma)\tau + (1-\sigma)(\varepsilon-\tau) \infty (1-\sigma)(\pi'' + \pi''_\alpha),$$

где $(1-\sigma)\pi'' \leqslant (1-\sigma)(\varepsilon-\varepsilon_\alpha)$. Согласно лемме 12, $(1-\sigma)\varepsilon = (1-\sigma)(\pi''+\pi''_\alpha)$. Умножая на ε_α, получим $(1-\sigma)\varepsilon_\alpha = (1-\sigma)\pi''_\alpha$, т. е. $(1-\sigma)(\varepsilon-\tau) \infty (1-\sigma)\varepsilon_\alpha$. Применяя лемму 5, будем иметь

$$\varepsilon_\alpha = (1-\sigma)\varepsilon_\alpha + \sigma\varepsilon_\alpha \infty (1-\sigma)(\varepsilon-\tau) + \sigma\pi' \leqslant \varepsilon - \tau.$$

Ввиду леммы 23, $\varepsilon \infty \varepsilon' \leqslant \varepsilon - \tau$. По лемме 12, $\varepsilon = \varepsilon - \tau$, откуда $\tau = 0$. Поскольку, согласно предложению 89, ж), $\varepsilon \to 1 - \varepsilon$ является антиизоморфизмом структуры проекций кольца R, то все доказано.

30. Полные дедекиндовы структуры с ортодополнениями.

Теорема 26. *Для того чтобы дедекиндова структура L с дополнениями, допускающая однородный базис ранга $\geqslant 4$, обладала ортодополнениями, необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна структуре главных левых идеалов некоторого $*$-регулярного кольца*[1]).

Доказательство. Достаточность условия сразу вытекает из предложения 89, ж). Для доказательства необходимости заметим, что, ввиду теорем 10, 2 и 3, можно считать, что L совпадает со структурой $\mathfrak{L}(R)$ главных левых идеалов некоторого регулярного кольца R. Условимся обозначать через $(R\alpha)'$ ортодополнение идеала $R\alpha$. Введя на R умножение по правилу $\alpha \circ \beta = \beta\alpha$, получим кольцо R', инверсно изоморфное R. Ввиду предложения 13, а),

$$R\alpha = R\varepsilon_\alpha \quad \text{и} \quad (R\alpha)' = R(1-\varepsilon_\alpha)$$

для однозначно определенного идемпотента ε_α. Согласно предложениям 13, е) и 13, б), отображение

$$\varphi : R\alpha = R\varepsilon_\alpha \to [(R\varepsilon_\alpha)']^r = \varepsilon_\alpha R = R' \circ \varepsilon_\alpha$$

является изоморфизмом структуры $\mathfrak{L}(R)$ на структуру $\mathfrak{L}(R')$. В силу теоремы 21, φ индуцируется изоморфизмом R на R', или, что то же самое, антиизоморфизмом $\alpha \to \alpha^*$ кольца R. Таким образом,

$$R' \circ \varepsilon_\alpha = R' \circ \varepsilon^*_\alpha \tag{149}$$

---

[1]) Neumann [6].

и

$$R' \circ (1 - \varepsilon_\alpha) = R' \circ (1 - \varepsilon^*_\alpha).$$

Ввиду предложения 13, а), отсюда следует, что $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^*_\alpha$. Следовательно, автоморфизм $\alpha \to \alpha^{**}$ индуцирует тождественный автоморфизм структуры $\mathfrak{L}(R)$. Ввиду теоремы 21, отсюда следует, что $\alpha^{**} = \alpha$, т. е. что автоморфизм $\alpha \to \alpha^*$ инволюционный. Если $\alpha\alpha^* = 0$, то, полагая $\varepsilon_\alpha = \xi\alpha$ и учитывая (149), будем иметь

$$\alpha = \alpha\varepsilon_\alpha = \alpha\varepsilon^*_\alpha\varepsilon_\alpha = \alpha\alpha^*\xi^*\xi_\alpha = 0.$$

Таким образом, R действительно оказывается $*$-регулярным кольцом.

Теорема 27. *Полная дедекиндова структура L с ортодополнениями является непрерывной геометрией* [1], [2].

Доказательству предпошлем несколько утверждений.

Условимся обозначать через a' ортодополнение элемента a. Скажем, что $a \perp b$, если $a \leqslant b'$.

а) *Если $a \perp b_\alpha$, то $a \perp \sum b_\alpha$.*

По условию $a \leqslant b'_\alpha$. Поэтому $a \leqslant \bigcap b'_\alpha = (\sum b_\alpha)'$.

б) *Если $a \in L$, то L_a — структура с ортодополнениями.*

Если $x \leqslant a$, то положим $\bar{x} = x'a$. Применяя МЗ, получим

$$\bar{\bar{x}} = (x'a)'a = (x + a')a = x + a'a = x,$$

$$\overline{x + y} = (x + y)'a = x'a \cdot y'a = \bar{x}\bar{y}$$

и

$$\overline{xy} = \overline{\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}} = \overline{\overline{\bar{x} + \bar{y}}} = \bar{x} + \bar{y}.$$

в) *В L имеют место свойства $\perp 1 - \perp 3$, А, Б, В и Д.*

$\perp 1$. Если $a \leqslant b'$, то $a' \geqslant (b')' = b$, т. е. $b \perp a$.

$\perp 2$. Очевидно.

$\perp 3$. Если $a \leqslant b'$ и $a + b \leqslant c'$, то $a \leqslant b'c' = (b + c)'$, т. е. $a \perp b + c$.

А. Очевидно.

Б. Если $M = I \cup J$ и $I \cap J$ пусто, $a \in I$, $b \in J$, то для подходящего α имеет место $a \in I \cap M_\alpha$ и $b \in J \cap M_\alpha$. Ясно, что $a \perp b$. Теперь остается только принять во внимание а).

В. Сразу следует из а).

---

[1]) Kaplansky [4]; Amemiya, Halperin [4].

[2]) Ввиду теоремы 17, этим решена 59-я проблема Биркгофа для полных структур.

Д. Пусть $\{a_\alpha, \alpha \in I\}$ — бесконечное $\perp$-независимое множество попарно перспективных элементов, $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$, где $I_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — равномощные непересекающиеся множества, $e_i = \sum_{I_i} a_\alpha$ и $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Ввиду предложения 70, $e_i \sim e_j$. Стало быть, L обладает однородным базисом ранга 4. Поэтому применение теоремы 26 и предложения 90, е) приводит к противоречию с теоремой 24.

г) Для доказательства теоремы 27 достаточно установить, что L удовлетворяет аксиоме непрерывности. Ввиду б), теорема 11 позволяет считать L полудистрибутивной или антидистрибутивной. Если L антидистрибутивна, то в) позволяет применить теорему 13. Следовательно, L обладает однородным базисом ранга $\geqslant 4$, так что остается только применить теоремы 26 и 25. Если L полудистрибутивна, то в) и теорема 14 позволяют считать, что L — $\perp$-однородная структура ранга n. Если $n \geqslant 4$, то аксиома непрерывности вытекает из предложения 68, б) и теорем 26 и 25. Таким образом, можно предполагать, что $n \leqslant 3$. Докажем такое утверждение:

д) *Если L полудистрибутивна и не содержит никакой $\perp$-независимой четверки ненулевых попарно перспективных D-элементов, а $\{b_\alpha\}$ — $\perp$-независимая система элементов из L, то найдется такой ненулевой центральный элемент $z \in L$, что $zb_\alpha = 0$ для всех α, кроме трех.*

Пусть $z_\alpha = e(b_\alpha)$. Если $z_1 z_\alpha = 0$ для всех $\alpha \neq 1$, то можно положить $z = z_1$. Если (может быть, после перемены нумерации) имеем $z_1 z_2 \neq 0$ и $z_1 z_2 z_\alpha = 0$ для всех $\alpha \neq 1, 2$, то в качестве z можно взять $z_1 z_2$. Если $z_1 z_2 z_3 \neq 0$ и $z_1 z_2 z_3 z_\alpha = 0$ для всех $\alpha > 3$, то положим $z = z_1 z_2 z_3$. Если же $v = z_1 z_2 z_3 z_4 \neq 0$, то положим $c_i = v b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ввиду предложений 71, б) и 65, в), в L_v найдется такой D-элемент $d_i \leqslant c_i$, что $e(d_i) = e(c_i) = ve(b_i) = v$. Следовательно, d_1, d_2, d_3, d_4 — правильные элементы структуры L_v. В силу предложения 68, б), они попарно перспективны. Так как из $\perp 2$ вытекает, что множество $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ $\perp$-независимо, то мы вступаем в противоречие с условием.

е) *Если $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ $\perp$-независимая система попарно перспективных D-элементов, то существует такой центральный элемент $z \in L$, что L_z обладает однородным базисом ранга $\geqslant 4$.*

Пусть $u = e(d_1)$. Ввиду предложения 65, а), d_1, d_2, d_3, d_4 — правильные элементы структуры L_u. Поэтому, рассуждая, как при доказательстве теоремы 14, можно найти такой центральный элемент z и такие правильные элементы $d_5, \ldots, d_n$ структуры L_u, что $z = \sum_1^n d_i z$ и система $\{d_1 z, \ldots, d_n z\}$ независима. Остается только применить предложение 68, б).

Чтобы закончить доказательство теоремы, рассмотрим возрастающую последовательность $\{a_\alpha\}$. Положим $b_\alpha = a_{\alpha+1} a'_\alpha$. Если $\alpha < \beta$, то

$$b_\alpha \leqslant a_\beta a'_\alpha \leqslant a_\beta + a'_{\beta+1} = (a_{\beta+1} a'_\beta) = b'_\beta,$$

т. е. $b_\alpha \perp b_\beta$. Ввиду а), система $\{b_\alpha\}$ $\perp$-независима. В силу свойства Б, лемма Цорна (Биркгоф [1], стр. 73, АС2) позволяет найти среди всех $\perp$-независимых систем центральных элементов структуры L, каждый из которых аннулирует почти все b_α, максимальную систему M. Ввиду предложения 64, $z = \sum_{z_\gamma \in M} z_\gamma$ — центральный элемент. Ясно, что для любого центрального элемента $u \leqslant 1 - z$ бесконечное множество элементов ub_α отлично от нуля. Поэтому, применяя д) и е), можно с помощью трансфинитного процесса разложить L_{1-z} в прямое произведение структур, каждая из которых обладает однородным базисом ранга $\geqslant 4$. Из теорем 26 и 25 вытекает справедливость аксиомы непрерывности в этих структурах, а значит, и в L_{1-z}. Поскольку

$$a_\alpha + b_\alpha = a_\alpha + a_{\alpha+1} a'_\alpha = a_{\alpha+1}(a_\alpha + a'_\alpha) = a_{\alpha+1},$$

то при $z_\gamma \in M$ имеет место $\sum_\alpha z_\gamma a_\alpha = z_\gamma a_{\alpha_\gamma}$ для некоторого индекса α_γ. Поэтому

$$(z_\gamma b) \sum_\alpha z_\gamma a_\alpha = z_\gamma b a_{\alpha_\gamma} = \sum_\alpha z_\gamma b z_\gamma a_\alpha.$$

Ввиду наличия ортодополнений, этим доказана справедливость аксиом непрерывности в L_{z_γ}, а значит, в L_z.

Теорема 27 допускает обобщение (Satō [1]):

Полная дедекиндова структура с дополнениями, допускающая инволюционный антиавтоморфизм, является непрерывной геометрией.

§ 9. ДОБАВЛЕНИЯ

31. Некоторые другие результаты. Объем книги не позволяет привести доказательства всех интересных результатов, непосредственно относящихся к рассматриваемому вопросу. В этом пункте будут сформулированы некоторые теоремы, не вошедшие в основную линию изложения. Первый круг вопросов связан с центром регулярного кольца. Ясно, что $R\alpha = R$ влечет существование элемента α^{-1}. Поэтому

если 0 *и* 1 — *единственные идемпотенты регулярного кольца, то оно является телом.*

Нетрудно показать (Neumann [6], ч. III, стр. 11, теорема 2.5; Maeda [7], стр. 147, теорема 3.4), что центр регулярного кольца является регулярным кольцом. Из предложений 13, з) и 98, а) следует, что

если Z — центр регулярного кольца R, то $\mathfrak{L}(Z)$ совпадает с центром структуры $\mathfrak{L}(R)$.

Если, далее, φ и ψ — такие элементы регулярного кольца R, что $\alpha \to \alpha\varphi$ и $\beta \to \beta\psi$ — взаимно обратные отображения $R\varepsilon$ на $R\delta$ и $R\delta$ на $R\varepsilon$ соответственно, то эти отображения называются *фактор-отображениями*, а элементы φ и ψ — *факторами.*

Если $R\varepsilon \sim R\delta$, то существует фактор-отображение $R\varepsilon$ на $R\delta$. Если $R\varepsilon \cap R\delta = 0$ и существует фактор-отображение $R\varepsilon$ на $R\delta$, то $R\varepsilon \sim R\delta$ (Maeda [7], стр. 151, теорема 4.6).

Если $\{R\varepsilon_1, \ldots, R\varepsilon_n\}$ — однородный базис структуры $\mathfrak{L}(R)$, $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ при $i \neq j$, $\sum \varepsilon_i = 1$ и автоморфизм θ структуры $\mathfrak{L}(R)$ индуцирует фактор-отображение $R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ на $[R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\,\theta$, то θ индуцируется внутренним автоморфизмом кольца R (Neumann [6], т. II, стр. 152, теорема 16.1).

Пусть R — регулярное кольцо, обладающее инволюционным антиавтоморфизмом $\alpha \to \alpha^*$. *Скалярным произведением* (a, b), где $a, b \in R^n$, называется отображение $R^n \times R^n$ в R, подчиненное следующим требованиям:

1. $(a, b) = (b, a)^*$;
2. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b) = (a, \lambda^* b)$;
3. $(a + b, c) = (a, b) + (a, c)$;
4. $(a, a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Пусть теперь L — дедекиндова структура с ортодополнениями, обладающая однородным базисом ранга $\geqslant 4$. Ввиду теоремы 10, структура L изоморфна R^n, где R — некоторое регулярное кольцо. Из утверждения б) на стр. 169 и теоремы 26 вытекает, что R $*$-регулярно. Маеда (Maeda [4], [7], стр. 234, теорема 3.1) показал, что *на R^n можно задать скалярное произведение так, что соотношения $S \leqslant T'$* (T' — ортодополнение модуля T) *и* $(s, t) = 0$ *для всех $s \in S$, $t \in T$ равносильны.*

Действительная функция $|\alpha|$, определенная на регулярном кольце R, называется *нормой* (Rangfunktion), если:

1) $0 \leqslant |\alpha| \leqslant 1$;

2) $|\alpha| = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$;

3) $|1| = 1$;

4) $|\alpha\beta| \leqslant |\alpha|, |\beta|$;

5) если $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\delta^2 = \delta$, $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$, то $|\varepsilon + \delta| = |\varepsilon| + |\delta|$.

Оказывается (Neumann [6], т. II, стр. 161, 162; Maeda [7], стр. 153), что $|\alpha| = |-\alpha|$, $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$, а если $R\alpha = R\beta$ или $\alpha R = \beta R$, то $|\alpha| = |\beta|$. Условие $\delta(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ превращает R в метрическое пространство (Neumann [6], т. II, стр. 161, лемма 18.1; Maeda [7], стр. 154, теорема 5.1). Если это пространство полно, то $\mathfrak{L}(R)$ оказывается непрерывной геометрией (Maeda [7], стр. 156, теорема 5.3).

Если $\mathfrak{L}(R)$ — не разложимая в прямое произведение непрерывная геометрия, то, согласно теореме 19, $\mathfrak{L}(R)$ допускает функцию размерности D. Устанавливается (Neumann [6], т. II, стр. 162; Maeda [7], стр. 165, теорема 2.2), что $|\alpha| = D(R\alpha)$ оказывается нормой. Метрическое пространство, определяемое на R с помощью этой нормы, полно. Если не предполагать, что $\mathfrak{L}(R)$ не разложимо в прямое произведение, то на R можно определить норму, значениями которой служат действительные функции, определенные на некотором топологическом пространстве (ср. теорему на стр. 123). С помощью этого понятия и фактор-отображения доказываются такие факты (Maeda [7], стр. 167, теорема 3.2; стр. 159, лемма 1.6):

1. *Если $\{I_\alpha\}$ — совокупность максимальных идеалов регулярного кольца R, причем $\mathfrak{L}(R)$ — непрерывная геометрия, то R разлагается в подпрямую сумму простых регулярных колец R/I_α.*

2. *Если R — регулярное кольцо, $\mathfrak{L}(R)$ — непрерывная геометрия и $R\alpha = R\beta$, то найдутся такие $\xi, \eta \in R$, что $\alpha = \xi\beta$, $\xi\eta = 1$.*

Регулярность [1]), разумеется, не могла не привлечь внимания «чистых» алгебраистов. Еще Нейман [Neumann [6], т. II, стр. 21) заметил, что регулярное кольцо не содержит ненулевых нильпотентных идеалов и что полупростое (в классическом

---

[1]) Здесь под регулярным кольцом понимается ассоциативное кольцо, в котором уравнение $\alpha\xi\alpha = \alpha$ всегда разрешимо. Существование единицы не предполагается.

смысле — Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. 2, стр. 170) кольцо всегда регулярно. В последнем утверждении условие минимальности для всех правых идеалов можно заменить условием минимальности для главных правых идеалов (Герчиков [1]). Регулярными оказываются также всякая алгебраическая алгебра без нильпотентных элементов (Jacobson [1]) и кольцо линейных преобразований векторного пространства над телом (Johnson, Kiokemeister [1]; Бэр [1], стр. 225, предложение 2). Всякое регулярное кольцо полупросто в смысле Джекобсона (Jacobson [2]). Интересным частным случаем регулярных колец являются изучавшиеся в ряде работ (Köthe [1]; Schilling [1]; Курош А. Г. [1], [2]; Курочкин В. М. [1]) локально матричные кольца, т. е. такие кольца, в которых каждое конечное подмножество элементов лежит в полном матричном подкольце. Конечные регулярные кольца исчерпываются прямыми суммами матричных колец над конечным полями (Dyer-Bennet [1]).

Мак-Кой (McCoy [1]) установил, что коммутативное кольцо с единицей регулярно в том и только в том случае, когда каждый его идеал является пересечением всех содержащих этот идеал простых идеалов. Для произвольного кольца R с единицей регулярность эквивалентна следующему условию:

«*Если I и J — левые идеалы кольца R, причем I — главный, и φ — гомоморфное отображеение идеала I, рассматриваемого как R-модуль, в фактор-модуль R/J, то найдется такой элемент $\alpha \in R$, что $\varphi(\alpha) = \xi\alpha$ для всех $\xi \in I$*» (Ikeda, Nakayama [1]).

Ковач (Kovács [1]) доказал, что кольцо R регулярно тогда и только тогда, когда для любых правого идеала I и левого идеала J имеет место $IJ = I \cap J$. В той же работе показано, что кольцо R без нильпотентных идеалов регулярно в том и только в том случае, когда любой квазиидеал[1]) в R идемпотентен. В работе Фукса и Селе (Fuchs, Szele [1]) показано, что классическими полупростыми кольцами исчерпываются все кольца, в которых все левые идеалы порождаются идемпотентами.

Форсайт и Мак-Кой (Forsyth, McCoy [1]) установили, что регулярное кольцо разлагается в подпрямую сумму тел тогда и только тогда, когда оно не содержит нильпотентных эле-

---

[1]) Подгруппа M аддитивной группы кольца R называется *квазиидеалом*, если $MR \cap RM \subset M$.

ментов. Для коммутативного случая этот результат был получен Кете (Köthe, [1]). Смайли (Smiley [1]) обобщил эту теорему на случай альтернативных регулярных колец.

Всякое коммутативное кольцо без нильпотентных элементов может быть вложено в коммутативное регулярное кольцо (McCoy [1]). Необходимые и достаточные условия вложимости произвольного кольца R в регулярное даны Гольдманом (Goldman [1]). Достаточным условием является существование во всяком ненулевом идеале кольца R такого элемента a, что для некоторого идеала I имеет место $I \cap a^2 = 0$ (Johnson [1]). Рассмотрение соответствующего регулярного кольца в этом случае оказывается полезным для изучения структуры правых идеалов самого кольца R (Johnson [2]).

Отметим интересный результат Фукса (Fuchs [1]; см. также [2]):

Аддитивная группа регулярного кольца является прямой суммой некоторого множества аддитивных групп рациональных чисел и группы A, содержащейся в полной прямой сумме групп T_p, каждая из которых есть прямая сумма циклических групп одного и того же простого порядка p (от слагаемого к слагаемому p меняется). *При этом A содержит дискретную прямую сумму T групп T_p, а A/T — полная группа.*

В 40-годах появляется ряд работ, в которых определяются различные радикалы для произвольных ассоциативных колец. В частности, Браун и Мак-Кой (Brown, McCoy [1]) использовали для определения радикала понятие регулярности. Они назвали радикалом кольца R его максимальный регулярный идеал (идеал I называется регулярным, если уравнение $\alpha\xi\alpha = \alpha$ разрешимо в R для всякого $\alpha \in I$).

В последние годы было предпринято исследование регулярных колец методами гомологической алгебры (Auslander [1]; Endo [1]; Harada [1]; Hattori [1]; McLaughlin [1]; Serre [1]). В частности показано, что кольцо с единицей регулярно тогда и только тогда, когда w. gl. $\dim R = 0$ [1]). Вильямайор (Villamayor [1]) доказал, что из регулярности групповой алгебры вытекает локальная конечность группы. Сюда же до некоторой степени примыкает результат Уцуми (Utumi [1]), доказавшего, что полупростое (в смысле Джекобсона) кольцо R с единицей, инъективное [2]) как левый и как правый R-модуль, регулярно

[1]) Считают, что w. gl. dim $R < n$, если Tor_n $R = 0$ (см. Картан и Эйленберг, Гомологическая алгебра, М., 1960, гл. V—VI).

[2]) Там же, стр. 23.

и структура его главных левых идеалов является непрерывной геометрией. Обратное имеет место, если в R нет идеалов без нильпотентных элементов (Utumi [2]).

Коммутативное кольцо R с единицей регулярно тогда и только тогда, когда всякий простой (т. е. не разложимый в прямую сумму) R-модуль инъективен (Rosenberg, Zelinsky [1]). Отметим, наконец, интересный результат Капланского (Kaplansky [5]): левый проективный модуль[1]) над регулярным кольцом является прямой суммой модулей, изоморфных главным левым идеалам кольца R. Структурно упорядоченные регулярные кольца изучал Брейнерд (Brainerd [1]). Отметим, наконец, что представляет интерес изучение регулярных полугрупп. Впервые они были рассмотрены Тьерреном (Thierrien [1]). Клиффорд (Clifford [1]) ввел строго регулярные полугруппы (см. ниже). В дальнейшем регулярные полугруппы изучались рядом авторов (Munn W., Penrose R. [1]; Круминг П. Д. [1]; Глускин Л. М. [1]; Chaudhuri N. [1]; Foulis D. [1] и др.). В книге Ляпина [1] им посвящен ряд параграфов.

Понятие регулярности неоднократно обобщалось. Мак-Кой (McCoy [2]) ввел в рассмотрение *π-регулярные* кольца — кольца, в которых для всякого элемента α найдется такое натуральное число n, что уравнение $\alpha^n\xi\alpha^n = \alpha^n$ разрешимо. Эти кольца исследовались также в работах Адзумая (Azumaya [1]), Икусима (Ikushima [1]), Колса (Kohls [1]) и Томинага и Ямада (Tominaga, Jamada [1]). Другое обобщение понятия регулярности предложил Блэр (Blair [1]). Он назвал кольцо *f-регулярным*, если $a \in (a)^2$ (через (a) обозначается двусторонний идеал, порожденный элементом a). Как и регулярность, f-регулярность может быть использована для определения радикала (Blair [2]). В коммутативном случае понятия регулярности и f-регулярности совпадают. Класс f-регулярных колец включает в себя бирегулярные и строго регулярные кольца. Кольцо называется *бирегулярным*, если каждый его главный двусторонний идеал порождается центральным идемпотентом (Arens, Kaplansky [1]), так что бирегулярность является двусторонним аналогом регулярности[2]). *Строго регулярным* называется кольцо, в котором всегда разрешимо уравнение $\alpha^2\xi = \alpha$ (Kandô [1]). Легко проверить, что строго регулярное кольцо

---

[1]) См. Картан и Эйленберг. Гомологическая алгебра, стр. 21.

[2]) Бирегулярные и π-регулярные кольца исследовались также Капланским (Kaplansky [1]), f-регулярные — Андрунакиевичем ([1], [3]).

не содержит нильпотентных элементов. Так как из $\alpha^2\xi = \alpha$ вытекает $(\alpha - \alpha\xi\alpha)^2 = 0$, отсюда следует, что строго регулярное кольцо регулярно. Центр бирегулярного кольца также бирегулярен, а структура его идеалов изоморфна структуре идеалов самого кольца (Morrison [1]). Каждый идеал бирегулярного кольца оказывается пересечением максимальных идеалов (Horne [1]). Все односторонние идеалы строго регулярного кольца являются двусторонними (Arens, Kaplansky [1]). Бирегулярные кольца тесно связаны с кольцами непрерывных функций. Эти и некоторые другие результаты можно найти в книге Джекобсона ([1], гл. IX). Там же доказываются и некоторые свойства π-регулярных колец. Как бирегулярные, так и строго регулярные кольца использовались для определения радикала (Андрунакиевич [2]; Kandô [1]). Многие результаты о перечисленных видах регулярности охватываются теорией так называемых $(F, \mathfrak{Q})$-групп, построенной Брауном и Мак-Коем (Brown, McCoy [2]).

Ввиду теоремы 3, кольцо матриц над телом является регулярным кольцом. Так как все цепи структуры главных левых идеалов этого кольца конечны, то она является непрерывной геометрией. С другой стороны, кольцо матриц над телом является частным случаем кольца линейных преобразований некоторого линейного многообразия над телом в смысле Бэра ([1]). Уайтситт (Whitesitt [1]) ввел в рассмотрение класс колец, включающий в себя оба упомянутых выше класса. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Левый идеал I называется *дополняемым*, если существует такой левый идеал J, что $I + J = R$, $I \cap J = 0$. Если S — подкольцо кольца R, то через $U(S)$ и $Z(S)$ обозначаются группа единиц и центр кольца S соответственно. Уайтситт налагает на кольцо R следующие требования: 1) $r \to r + r$ — автоморфизм аддитивной группы кольца R; 2) если левые идеалы I и J дополняемы, то $I + J$ и $I \cap J$ также дополняемы; 3) если $e, r \in R$, $e \neq 0$, $e^2 = e$, то как из $eRr = 0$, так и из $rRe = 0$ вытекает, что $r = 0$; 4) если $e \in R$, $e^2 = e$, то $Z(U(eRe)) \subset Z(eRe)$; 5) $Z(R)$ не содержит делителей нуля. Можно проверить (Бэр [1]; Erlich [1]), что эти условия выполнены как для колец линейных преобразований, так и для колец, у которых структура главных левых идеалов — непрерывная геометрия, не разложимая в прямое произведение. Оказывается, что дополняемые левые идеалы кольца R образуют дедекиндову структуру $\mathfrak{S}(R)$ с дополнениями, а из изоморфизма групп $U(R_1)$ и $U(R_2)$ вытекает изоморфизм структур $\mathfrak{S}(R_1)$ и $\mathfrak{S}(R_2)$ (ср. Бэр [1], стр. 252).

Отметим еще одно направление, связанное с непрерывными геометриями. Самосопряженная алгебра операторов гильбертова пространства, замкнутая в равномерной топологии (Наймарк [1], стр. 400), называется *C^*-алгеброй*. Аксиоматическое описание этого класса алгебр дано Гельфандом и Наймарком (On the Imbedding of Normed Ring into the Ring of Operators in Hilbert Space, Матем, сб. **12** (1943), 197—217). Самосопряженные идемпотенты C^*-алгебры называются проекциями. Множество проекций можно частично упорядочить, считая, что $e \geqslant f$ тогда и только тогда, когда $ef = f$. Капланский (Kaplansky [2]) назвал *AW^*-алгеброй* C^*-алгебру, в которой любое множество ортогональных проекций имеет точную верхнюю грань, а любая максимальная коммутативная самосопряженная подалгебра порождается своими проекциями. Проекции e и f называются эквивалентными (в обозначениях $e \backsim f$), если найдется такой частично изометрический элемент x, что $xx^* = e$ и $x^*x = f$ (ср. стр. 136). AW^*-алгебра называется конечной, если из $f \backsim e$ следует, что $1 = e$ (ср. стр. 118). Оказалось (Kaplansky [2]), что проекции конечной AW^*-алгебры образуют непрерывную геометрию. Использованные здесь методы были в дальнейшем применены к $*$-регулярным кольцам (Kaplansky [4]). Сасаки (Sasaki [3]) обобщил результат Капланского, показав, что непрерывную геометрию образуют конечные проекции произвольной AW^*-алгебры. Исследуя AW^*-алгебры, Райт (Wright [1]) нашел возможность строить новые примеры факторов типа II_1, а значит, и новые примеры непрерывных геометрий. Новые способы построения конечных факторов предложены в работах Накамура и Такеда (Nakamura M., Takeda Z. [1], [2], [3]). Отметим, что существование неизоморфных факторов типа II_1 было доказано лишь в 1943 г. (Murrey, Neumann [3]). Берберян (Berberian [4]) установил, что кольцо матриц над AW^*-алгеброй также является AW^*-алгеброй. Он же (Berberian [2], [3]) показал, что с каждой AW^*-алгеброй естественным образом связано регулярное кольцо. Фелдман и Фелл (Feldmann, Fell [1]) изучали $*$-гомоморфизмы AW^*-алгебр. Маеда (Maeda [8]) осуществил аксиоматический подход к изучению AW^*-алгебр. AW^*-алгебры изучались и в ряде других работ (Berberian [1]; Feldman [2]; Goldman [1], [2]; Nakai [1]; Ono [1], Kaplansky [3]; Sakai [1]; Yen Ti [1]—[3]).

Особый интерес представляют аппроксимативно конечные факторы (Наймарк [1], стр. 437), поскольку соответствующие непрерывные геометрии являются объединением счетной последовательности вложенных друг в друга проективных геометрий. Первый пример неатомной непрерывной геометрии был получен именно так (Neumann [2]; Биркгоф [1], стр. 182—183). Меррей и Нейман (Murrey, Neumann [3]; Dixmier [2]) показали, что всякий фактор типа II_1 содержит аппроксимативно конечный фактор типа II_1. Там же было доказано существование не аппроксимативно конечных факторов. Диксмье (Dixmier [1]) показал, что аппроксимативно конечные факторы допускают $*$-автоморфизмы, не являющиеся внутренними. Исследование различных форм определения аппроксимативной конечности для AW^*-алгебр предпринял Уайдом (Widom [1], [2]).

32. Проблемы. Вопросы единственности, рассмотренные в § 7, приводят к постановке следующих задач:

Проблема 1. Существенны ли в теоремах 22 и 23 условия полноты и непрерывности структуры?

Проблема 2. Следует ли из изоморфизма колец F_n и G_n изоморфизм колец F и G?

Замечание. Если кольца F и G регулярны, то, ввиду теорем 2 и 21, проблемы 1 и 2 равносильны.

Обозначим через $\mathfrak{N}(R)$ множество левых, правых и двусторонних идеалов кольца R. Пусть φ — сохраняющее включение взаимно однозначное отображение $\mathfrak{N}(K)$ на $\mathfrak{N}(L)$, где L — кольцо всех линейных преобразований некоторого линейного пространства над телом, и $(AB)^\varphi = A^\varphi B^\varphi$ для любых левого и правого идеалов A и B соответственно кольца K. Тогда, как показал Вулфсон (Wolfson K. [1]), K и L изоморфны.

Проблема 3. Нельзя ли в этой теореме в качестве L взять любое регулярное кольцо? Или хотя бы непрерывное?

Для решения проблемы 1 может оказаться полезным положительный ответ на такой вопрос:

Проблема 4. Всякое ли регулярное кольцо можно погрузить в регулярное кольцо, структура главных левых идеалов которого является непрерывной геометрией (в частности, если структура главных левых идеалов исходного кольца полна)?

С этой проблемой связана

Проблема 5. Является ли пополнение с помощью сечений любой дедекиндовой структуры с дополнениями обязательно дедекиндовой структурой (Биркгоф [1], проблема 57)?

Ввиду теоремы 19, кольцо, для которого проблема 3 решается положительно, должно обладать нормой (см. стр. 173). Естественно спросить:

Проблема 6. Не будет ли это условие достаточным?

Проблема 7. Всякое ли регулярное кольцо допускает норму?

Проблема 8. Пусть R — верхний предел некоторого спектра матричных колец, взятых с дискретной топологией. Будет ли пополнение кольца R регулярным? А если на кольцах матриц дана какая-либо другая топология?

Более общей является

Проблема 9. Является ли пополнение топологического регулярного кольца регулярным?

Мы уже упоминали о непрерывной геометрии $CG(F)$, построенной Нейманом и связанной с некоторым телом F (см. Биркгоф [1], гл. VIII, § 10). Если R — поле действительных чисел, K — поле комплексных чисел, а Q — тело кватернионов, то $CG(R)$ изоморфна $CG(Q)$, но не изоморфна $CG(K)$ (Биркгоф [1], стр. 183, упр. 8). Этот результат вытекает из следующей теоремы (Neumann [4]): если R, R' — тела, имеющие конечный ранг над своим центром, то структуры $CG(R)$ и $CG(R')$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны центры тел R и R' (см. также Neumann [8]). С проблемой 1 связана также

Проблема 10. Какова связь между телами F и G, если структуры $CG(F)$ и $CG(G)$ изоморфны?

По-видимому, в указанной выше конструкции можно начинать с довольно широкого класса регулярных колец (см. лемму на стр. 132). Поэтому проблема 10 допускает обобщение:

Проблема 11. Какова связь между кольцами F и G, если изоморфны структуры $CG(F)$ и $CG(G)$, в частности, если F — тело?

Интересна также

Проблема 12. Охарактеризовать абстрактно с точностью до изоморфизма и как метрическую группу группу всех изометричных преобразований пространства $CG(F)$. Связна ли она, если F — поле действительных чисел (Биркгоф [1], проблема 60)?

Заметим, что в последнем случае само пространство $CG(F)$ оказывается связным в топологии $\delta(a, b) = D(a+b) - D(ab)$ (Neumann [2]).

Фринк (Frink [1]) показал, что всякая дедекиндова структура L с дополнениями изоморфна подструктуре прямого произведения Π атомных проективных геометрий (см. также Биркгоф [1], гл. VIII, § 13). Йонссон (Jonsson [1]) установил, что всякое тождество, справедливое в L, справедливо и в Π.

Проблема 13. Как связаны между собой различные минимальные структуры Π, соответствующие данной структуре L?

В частности

Проблема 14. Если $L = CG(F)$, где F — тело, то не будет ли Π атомной проективной геометрией? Не связана ли она с телом F (Биркгоф [1], проблема 63)?

Отметим, что структура всех дуальных идеалов структуры $CG(F)$ не является структурой с дополнениями, хотя все ее элементы суть суммы атомов (Биркгоф [1], стр. 188, упр. 4).

Легко проверить, что кольцо $P(R^n)$ линейных преобразований модуля R^n изоморфно кольцу R_n. Ввиду теоремы 3, $P(R^n)$ регулярно одновременно с R. То же самое можно сказать и о свойстве быть AW^*-алгеброй (Berberian [4]). Как заметил К. К. Джансеитов, нетрудно проверить, что если R — фактор типа II_1, то таким же является и кольцо $P(R^n)$. Эти факты, очевидно, связаны с программой исследований, намеченной Гельфандом ([1], стр. 11). Остается открытой

Проблема 15. Будет ли кольцо $P(R^n)$ $*$-регулярным, если $*$-регулярно R?

При исследовании этого вопроса может оказаться полезной работа Видава (Vidav [1]), рассмотревшего регулярные кольца с таким инволюционным антиавтоморфизмом, что $x_1x_1^* + \ldots + x_mx_m^* = 0$ возможно лишь при $x_1 = \ldots$ $\ldots = x_m = 0$.

Пусть M — свободный R-модуль, а $P(M)$ — кольцо всех линейных отображений модуля M в себя. Мы уже отмечали (стр. 174), что $P(M)$ регулярно, если R — тело. Однако:

Проблема 16. Будет ли $P(M)$ регулярным, если регулярно кольцо R, в частности, если R — простое регулярное кольцо?

В предложении 98 установлена связь между $\mathfrak{L}(R \dot{+} S)$, $\mathfrak{L}(R)$ и $\mathfrak{L}(S)$. Если $R \times S$ — прямое произведение регулярных колец, то структура $\mathfrak{L}(R \times S)$ может быть описана следующими свойствами: она содержит подструктуры A и B, которые: а) изоморфны соответственно $\mathfrak{L}(R)$ и $\mathfrak{L}(S)$; б) имеют те же 0 и 1, что и $\mathfrak{L}(R \times S)$; в) если $a \in A$, $b \in B$, то $(a+b)c = ac + bc$ для любого $c \in \mathfrak{L}(R \times S)$; г) из $ab = 0$ вытекает, что $a = 0$ или $b = 0$ (Биркгоф [1], стр. 185, упр. 2).

Проблема 17. Возможно ли синтетическое определение $\mathfrak{L}(R \times S)$ в терминах структур $\mathfrak{L}(R)$ и $\mathfrak{L}(S)$ (Биркгоф [1], проблема 61)?

Аналогичный характер имеет

Проблема 18. Пусть L и L' — дедекиндовы структуры с дополнениями, $a, b \in L$, $a', b' \in L'$, структуры L_a и L_b изоморфны структурам $L_{a'}$ и $L_{b'}$ соответственно. Всегда ли будут изоморфны структуры L_{a+b} и $L_{a'+b'}$?

Мы показали (теоремы 2, 4 и 10), что структуры вида $\mathfrak{L}(R)$, где R — регулярное кольцо, характеризуются как дедекиндовы структуры с дополнениями (с некоторыми оговорками, конечно).

Проблема 19. Дать теоретико-структурную характеристику структуры всех левых идеалов регулярного кольца с единицей.

Ввиду теоремы 2, проблему 19 можно сформулировать так:

Проблема 20. Дать теоретико-структурную характеристику структуры $\mathfrak{S}$ всех левых подмодулей модуля R^n, где R — регулярное кольцо с единицей.

Проблема 21. Не будут ли образовывать структуру левые подмодули модуля R^n, обладающие дополнением? (Ср. Whitesitt [1].)

Сама структура $\mathfrak{S}$ уже не обладает дополнениями. Однако она обладает однородным базисом ранга n. Последнее будет иметь место и без предположения о регулярности кольца R. Достаточно, чтобы в R была единица. Если R — тело, то этот базис состоит из D-элементов. То же самое справедливо, если R — коммутативное регулярное кольцо (стр. 172) или коммутативное кольцо главных идеалов (Sai [1]).

Проблема 22. Исследовать дедекиндовы структуры, обладающие однородным базисом, состоящим из D-элементов.

В частности

Проблема 23. Исследовать дедекиндовы структуры, обладающие таким однородным базисом $a_1, \ldots, a_n$, что L_{a_i} — цепи. Вопрос может облегчиться, если предполагать, что все эти цепи конечны.

С поставленными задачами связаны:

Проблема 24. Исследовать дедекиндовы структуры, в которых каждый элемент является суммой конечного числа D-элементов.

П р о б л е м а 25. Исследовать дедекиндовы структуры, в которых каждый элемент представляется в форме $a = \sum_{i=1}^{n(a)} a_i$, где L_{a_i} — цепи (в частности, конечные).

Проблемой 25 для случая, когда цепи конечны, занимался Бэр (Baer [1]).

Отметим еще один вопрос:

П р о б л е м а 26. Дать теоретико-структурную характеристику структуры $\mathfrak{L}(R)$, где R — коммутативное регулярное кольцо с единицей.

Заметим, что указанную структуру, по-видимому, нельзя охарактеризировать тождественными соотношениями (Биркгоф [1], стр. 172, упр. 4, б). Может быть, это удастся сделать, допуская существование достаточно большого числа антиавтоморфизмов (ср. Скорняков Л. А., Проективные плоскости, Успехи матем. наук, 6 (1951), 112—154, теорема 24; Pickert G., Projektive Ebenen, Berlin, 1955, стр. 149). Полезно учесть, что дедекиндова структура с дополнениями, обладающая однородным базисом ранга $\geqslant 4$, состоящим из D-элементов, изоморфна $\mathfrak{L}(R)$ для некоторого регулярного кольца R, в котором все идемпотенты центральные (теорема 10 и предложение 98, а)).

Интересна

П р о б л е м а 27. Построить аффинную геометрию над регулярным кольцом.

Здесь могут оказаться полезными результаты Сасаки (Sasaki [3], [4]) и Ху (Hsu Chen-Jung [1]).

Кольцо R называется *первичным*, если из $\alpha R \beta = 0$ вытекает, что $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ (легко проверить, что это равносильно тому, что произведение двух ненулевых двусторонних идеалов отлично от нуля). Из леммы 3 на стр. 158 вытекает, что $*$-регулярное кольцо первично тогда и только тогда, когда 0 и 1 являются его единственными центральными идемпотентами. Естественна

П р о б л е м а 28. Справедлив ли этот результат для произвольных регулярных колец?

Примыкает сюда

П р о б л е м а 29. Описать простые регулярные кольца.

В связи с этим отметим, что простое строго регулярное кольцо является телом (Arens, Kaplansky [1]). Учитывая теорему Форсайта и Мак-Коя (см. стр. 174), можно получить тот же результат для регулярных колец без нильпотентных элементов.

Проблема 30. Какие дедекиндовы структуры с дополнениями координатизируются простыми регулярными кольцами?

В связи с результатом Зелинского (Zelinsky [1]) возникает

Проблема 31. Нельзя ли каждый элемент регулярного кольца с единицей представить в виде суммы элементов, обладающих обратными[1])?

Андрунакиевич [1] показал, что главные идеалы бирегулярного кольца образуют дистрибутивную структуру с относительными дополнениями.

Если кольцо содержит единицу, то эта структура оказывается булевой алгеброй. Отметим еще, что кольцо матриц над бирегулярным кольцом также бирегулярно (Андрунакиевич [2]). С другой стороны, каждая булева алгебра изоморфна структуре главных идеалов некоторого булева кольца (Биркгоф [1], стр. 219, упр. 2). Ясно, что булево кольцо бирегулярно.

Проблема 32. Как связаны между собой бирегулярные кольца, координатизирующие одну и ту же булеву алгебру?

Проблема 33. Как связаны между собой бирегулярные кольца, координатизирующие одну и ту же дистрибутивную структуру с относительными дополнениями?

Проблема 34. Образуют ли структуру подбимодули конечного происхождения подбимодуля строк над бирегулярным кольцом? Не будет ли она обладать дополнениями, если в кольце есть единица?

Проблема 35. Охарактеризовать структуру всех подбимодулей бимодуля строк над бирегулярным кольцом с единицей.

Так как всякое простое кольцо с единицей бирегулярно, то проблемы 34 и 35 можно поставить и для этого частного случая[2]).

Проблема 36. Найти двусторонний аналог $*$-регулярности.

Топологические регулярные кольца практически не изучались. Известен только результат Круминга [1], показав-

---

[1]) См. также Utumi [2], стр. 602.

[2]) Оказывается, что подбимодули бимодуля строк над простым кольцом R с единицей образуют атомную дедекиндову структуру с дополнениями. Она координатизируется с помощью центра кольца R (З. С. Липкина).

шего, что регулярная связная бикомпактная хаусдорфова топологическая полугруппа или является группой, или содержит бесконечно много идемпотентов.

Проблема 37. Описать локально бикомпактные топологические регулярные кольца, хотя бы связные.

Аналогичные проблемы можно поставить для бирегулярных, а также и для строго регулярных колец.

В связи с поставленными вопросами полезно иметь в виду результаты Анцаи (Anzai H., On compact topological rings, Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 613—615) и Мильмана (Мильман Д., Нормируемость топологических колец, Докл. АН СССР **47** (1945), 166—168). См. также Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М., 1954, гл. IV. Укажем, наконец, на работы Гилмана и Хенриксена (Gillman, Henriksen [1], [2]), в которых исследовались такие топологические пространства, что кольца функций, непрерывных на них, регулярны.

ЛИТЕРАТУРА

Андрунакиевич В. А.

1. Кольца с условием минимальности для идеалов. Докл. АН СССР **98** (1954), 329—332.
2. Бирегулярные кольца. Матем. сб. **39** (1956), 447—464.
3. Антипростые и сильно идемпотентные кольца. Изв. АН СССР (сер. матем.) **21** (1957), 125—144.

Биркгоф Г.

1. Теория структур, М., 1952.

Бэр Р.

1. Линейная алгебра и проективная геометрия, М., 1955.

Гельфанд И. М.

1. О некоторых проблемах функционального анализа. УМН **11** (1956), № 6, 3—12.

Герчиков А. И.

1. Кольца, разложимые в прямую сумму тел. Матем. сб. **7** (1940), 591—597.

Глускин Л. М.

1. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств. Изв. АН СССР (сер. матем.) **23** (1959), 841—870.

Джекобсон Н.

1. Строение колец, М., 1960.

Круминг П. Д.

1. О делимости в топологических полугруппах. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена **183** (1958), 271—275.

Курош А. Г.

1. Direct decompositions of simple rings, Матем. сб. **11** (1942), 245—264.
2. К теории локально простых и локально центральных алгебр. Укр. матем. ж. **3** (1951), 205—210.

Курочкин В. М.

1. К теории локально простых и локально нормальных алгебр. Матем. сб. **22** (1948), 443—454.

Ляпин Е. С.

1. Полугруппы, М., 1960.

Наймарк М. А.

1. Кольца операторов в гильбертовом пространстве. УМН **4** (1949), № 4 (32), 83—147.
2. Нормированные кольца, М., 1956.

Скорняков Л. А.

1. О структурном изоморфизме модулей над регулярным кольцом. Докл. АН СССР **131** (1960), 756—757.
2. О модулях с автодуальной структурой подмодулей. Сиб. мат. ж. **1** (1960), 238—241.

Amemiya I.

1. On the representation of complemented modular lattice. J. Math. Soc. Japan. **9** (1957), 263—279.

Amemiya I., Halperin I.

1. Non-associative regular rings and von Neumann's coordinatiration theorem. Abstr. Short. communs. Internat. Congress Math. in Edinburg, 1958, 11—12.
2. Coordinatiration of complemented modular lattices. Proc. Konikl. nederl. akad. wet. **A62** (1959), 70—78.
3. Complemented modular lattices derived from non-associative rings. Acta sci. math. **20** (1959), 181—201.
4. Complemented modular lattices. Canad. J. Math. **11** (1959), 481—520.

Arens R., Kaplansky I.

1. Topological representation of algebras. Trans. Am. Math. Soc. **63** (1948), 457—481.

Auslander M.

1. On regular groups ring. Proc. Am. Math. Soc. **8** (1957), 658—664.

Azumaya G.

1. Strengly π-regular ring. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **13** (1954), 34—39.

Baer R.

1. A unified theory of projective spaces and finite abelian groups. Trans. Am. Math. Soc. **52** (1942), 283—343.

Berbirian S.

1. On the projection geometry of a finite AW^*-algebra. Trans. Am. Math. Soc. **83** (1956), 493—509.

2. Reduction of the projection geometry of finite AW^*-algebra. Bull. Am. Math. Soc. **62** (1956), 348.
3. The regular ring of a finite AW^*-algebra. Ann. Math. **65** (1957), 224—240.
4. $N \times N$ matrices orer an AW^*-algebra. Am. J. Math. **80** (1958), 37—44.

Birkhoff G.
1. Von Neumann and lattices theory. Bull. Am. Math. Soc. **64** (1958), № 3, 4.2, 50—56.

Blair R.
1. Ideal lattices and the structure of rings. Trans. Am. Math. Soc. **75** (1953), 136—153.
2. A note of f-regularities in rings. Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 511—515.

Brainerd B.
1. On a class of lattice-ordered rings, I. Proc. Am. Math. Soc. **8** (1957), 673—683; II. Proc. Konikl. nederl. akad. wet. **A60** (1957), 541—547.

Brown B., McCoy N.
1. The maximal regular ideals of a ring. Proc. Am. Math. Soc. **1** (1950), 165—171.
2. Theorems on group with applications to ring theory. Trans. Am. Math. Soc. **69** (1950), 302—311.

Chaudhuri N.
1. Sur les proprietes des semi-groupes inversifs verifiant la regle de simplification d'un côté. C. r. Acad. sci. **250** (1960), 1420—1423.

Clifford A.
1. Semi-groups admitting relative inverses. Ann. Math. **42** (1941), 1037—1049.

Dixmier J.
1. Sous-anneaux abeliens maximaux dans les facteurs de type fini. Ann. Math. **59** (1954), 279—286.
2. Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien (Algebres de von Neumann), Paris, 1957.

Dyer-Bennet J.
1. A note on finite regular rings. Bull. Am. Math. Soc. **47** (1941), 784—787.

Ehrlich G.
1. Characterization of a continuous geometry within the unit groups. Trans. Am. Math. Soc. **83** (1956), 397—416.

Endo Sh.
1. Note on *P. P.*-rings (A supplement to Hattori's paper). Nagoya Math. J. **17** (1960), 167—170.

Feldman J.

1. Somme connections between topological and algebraic properties in rings of operators. Duke Math. J. **23** (1956), 365—370.
2. Isomorphisms of finite type II rings of operators. Ann. Math. **63** (1956), 565—571.

Feldmann J., Fell J.

1. Separable representations of rings of operators. Ann. Math. **65** (1957), 241—249.

Forsyth A., McCoy N.

1. On the commutativity of certain rings. Bull. Am. Math. Soc. **52** (1946), 523—526.

Foulis D.

1. Baer *-semi-groups. Proc. Am. Math. Soc. **11** (1960), 648—654.

Frink O.

1. Complemented modular lattices and projective planes of infinite dimension. Trans. Am. Math. Soc. **60** (1946), 452—467.

Fryer K., Halperin I.

1. Coordinates in geometry. Trans. Roy. Soc. Canada **48** (1954), 11—26.
2. On the coordinatization theorem of J. von Neumann. Canad. J. Math. **7** (1955), 432—444.
3. The von Neumann coordinatization theorem for complemented modular lattices. Acta sci. math. **17** (1956), 203—249.
4. On the construction of coordinates for non-Desarguesian complemented modular lattices. Proc. Konikl. nederl. akad. wet. **A61** (1956), 142—161.

Fuchs L.

1. Ringe und ihre additive Gruppe. Publs. math. **4** (1956), 488—508.
2. Abelian groups. Publishing house of the Hung. Acad. sci. Budapest, 1958.

Fuchs L., Szele T.

1. On semisimple rings. Acta math. Acad. sci. Hungar. **3** (1952), 233—239.

Fuglede B., Kadison R.

1. Determinant theory in finite factors. Ann. Math. **55** (1952), 520—530.

Gillman L., Henriksen M.

1. Concerning ring of continuous functions. Trans. Am. Math. Soc. **77** (1954), 340—352.
2. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal. Trans. Am. Math. Soc. **82** (1956), 366—391.
3. Some remarks about elementary divison rings. Trans. Am. Math. Soc. **82** (1956), 362—365.

Givens W.

1. Polarities and signate in continuous geometry. Bull. Am. Math. Soc. **57** (1951), 459—460.

G o l d m a n M.
1. Structure AW^*-algebras. Duke Math. J. **23** (1956), 23—24.
2. On subfactors of factors of type II_1. Michigan Math. J. 6 (1959), 167—172.

G o l d m a n O.
1. Semi-simple extensions of rings. Bull. Am. Math. Soc. **52** (1946), 1028—1032.

H a l p e r i n I.
1. On the transitivity of perspectivity in continuos geometries. Trans. Am. Math. Soc. **44** (1938), 537—562.
2. Dimensionality in reducible geometries. Ann. Math. **40** (1939), 581—599.
3. Additivity and continity of perspectivity. Duke Math. J. **5** (1939), 503—511.
4. Непрерывные геометрии. J. von Neumann'a (венг.). Mat. Lapok 9 (1958), 225—231.

H a r a d a M.
1. Note on the dimension of modules and algebras. J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. **7** (1956), 17—27.

H a t t o r i A.
1. A foundation of torsion theory for modules over general rings. Nagoya Math. J. **17** (1960), 147—158.

H o r n e J.
1. On the ideal structure of certain semirings and compactification of topological spaces. Trans. Am. Math. Soc. **90** (1959), 408—430.

H s u C h e n - J u n g
1. On lattice theoretic characterization of the parallelism in affine geometry. Ann. Math. **50** (1949), 1—7.

I k e d a M., N a k a y a m a T.
1. On some characteristic properties of quisi-Frobenius and regular ring. Proc. Am. Math. Soc. **5** (1954), 15—19.

I k u s h i m a I.
1. On π-regular ring. J. Osaka inst. of sci. and technology **2** (1950), 91—95.

I w a m u r a T.
1. Непрерывные геометрии (японск.). Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai **254** (1943), 283—313.
2. On continous geometrie, I. Japan. J. Math. **19** (1944), 57—71; II. J. Math. Soc. Japan. **2** (1950), 148—164.

J a c o b c o n N.
1. Structure theory of for algebraic algebras of bounded degrec. Ann. Math. **46** (1945), 695—707.
2. The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Am. J. Math. **67** (1945), 300—320.

J o h n s o n R.

1. The extented centralizer of a ring over a module. Proc. Am. Math. Soc. **2** (1951), 891—895.
2. Prine rings. Duke Math. J. **18** (1951), 799—809.

J o h n s o n R., K i o k e m e i s t e r F.

1. The endomorphisms of the total operator domain of an infinite module. Trans. Am. Math. Soc. **62** (1947), 404—430.

J o n s s o n B.

1. Modular lattices and Desargus' theorem. Math. Scand. **2** (1954), 295—314.
2. Representation of complemented modular lattices. Trans. Am. Math. Soc. **97** (1960), 64—94.

K a n d ô T.

1. Strong regularity in arbitrary rings. Nagoya Math. J. **4** (1952), 51—53.

K a p l a n s k y I.

1. Topological representation of algebras, II. Trans. Am. Math. Soc. **68** (1950), 62—75.
2. Projections in Banach algebras. Ann. Math. **53** (1951), 235—249.
3. Algebras of type I. Ann. Math. **56** (1952), 460—472.
4. Any orthocomplemented complete modular lattice is continuous geometry. Ann. Math. **61** (1955), 524—541.
5. Projective modules. Ann. Math. **68** (1958), 372—377.

Русский перевод: Проективные модули. Математика **4** (1960), № 1, 3—8.

6. Problems in the theory of ring. Report of conference on linear algebra, Washington, 1957.

K a w a d a Y., H i g u c h i K., M a t s u s h i m a Y.

1. Bemerkungen zur vorangehenden Arbeiten von Herrn T. Iwamura. Japan. J. Math. **19** (1944), 73—79.

K o d a i r a K., F u r u y a S.

1. Непрерывные геометрии (японск.). Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai, I, **168** (1938), 514—553; II, **169** (1938), 593—609; III, **170** (1938), 638—656.

K o h l s C.

1. On the embedding of a generalized regular ring in a ring with identity. Michigan Math. J. **3** (1955/56), 165—168.

K ö t h e G.

1. Schiefkörper unendlischen. Ranges über dem Zentrum. Math. Ann. **111** (1935), 16—41.
2. Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie. Jahrbericht Deutsch. Math. Verein. **47** (1937), 125—144.

Kovács L.

1. A note on regular rings. Publs. math. **4** (1956), 465—468.

Loomis L.

1. The lattice-theoretic background of the dimension theory of operator algebra. Mem. Am. Math. Soc., № 18 (1955).

McCoy N.

1. Subrings of infinite direct sums. Duke Math. J. **4** (1938), 486—494.
2. Generalized regular rings. Bull. Am. Math. Soc. **45** (1939), 175—178.

McLaughlin J.

1. A note on regular group rings. Michigan Math. J. **5** (1958), 127—128.

Maeda F.

1. Непрерывная геометрия и лемма Цорна (японск.). Lenkoku Shijo Sugaku Danwakai **236** (1942), 1056—1058.
2. Размерностная структура приводимой геометрии (японск.). J. Sci. Hiroshima Univ. **13** (1944), 11—40.
3. Embedding theorem of continuous regular rings. J. Sci. Hiroshima Univ. **14** (1950), 1—7.
4. Representation of orthocomplemented modulal lattices. J. Sci. Hiroshima Univ. **14** (1950), 93—96.
5. Непрерывные геометрии (японск.), 1952.
6. Dimension funktions on certain general lattices. J. Sci Hiroshima Univ. **19** (1955), 211—238.
7. Kontinuerliche Geometrien, Berlin, 1958.
8. On the lattice of projections of Baer $*$-ring. J. Sci. Hiroshima Univ. **22** (1958), 75—88.
9. Decomposition of general lattices into direct summands of types I, II and III. J. Sci. Hiroshima Univ. **23** (1959), 151—170.

Morrison D.

1. Biregular rings and the ideal lattice isomorphisms. Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 46—49.

Munn W., Penrose R.

1. A note on inverse semi-groups. Proc. Cambr. Phil. Soc. **51** (1955), 396—399.

Murrey F., Neumann J.

1. On rings of operators, I. Ann. Math. **37** (1936), 116—229; II. Trans. Ann. Math. Soc. **41** (1937), 208—248; IV. Ann. Math. **44** (1943), 716—808.

Musonou G.

1. Unitary equivalence of factors of tipe III. Proc. Japan. Acad. **29** (1953), 482—485.
2. Generalized approximately finite W^*-algebras. Tôhoku Math. J. **7** (1955), 192—205.

Nakai M.

1. Some expectations in AW^*-algebras. Proc. Japan. Acad. **34** (1958), 411—416.

Nakamura M., Takeda Z.

1. On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras. Proc. Japan. Acad. **34** (1958), 489—494.
2. On the extensions of finite factors I. Proc. Japan. Acad. **35** (1959), 149—154.
3. A Galois theory for finite factors. Proc. Japan. Acad. **36** (1960), 258 — 260.

Nakayama T.

1. A remark on finitely generated modules. Nagoya Math. J. **3** (1951), 139—140.

Neumann J.

1. Continuous geometry. Proc. Nat. Ac. Sci. USA **22** (1936), 92—100.
2. Examples of continuous geometries. Proc. Nat. Ac. Sci. USA **22** (1936), 101—108.
3. On regular rings. Proc. Nat. Ac. Sci. USA **22** (1936), 707—713.
4. Algebraic theory of continuous geometries. Proc. Nat. Ac. Sci. USA **23** (1937), 16—22.
5. Continuous rings and their arithmetics. Proc. Nat. Ac. Sci. USA **23** (1937), 341—349. Поправка: **23** (1937), 593.
6. Continuous geometry, I. Michigan, 1936; II—III. Michigan, 1937.
7. On rings of operators. III. Ann. Math. **41** (1940), 94—161.
8. The non-isomorphism of certain continuous ring. Ann. Math. **67** (1958), 485—496.
9. Continuous geometry, New York, 1960.

Neumann J., Halperin I.

1. On the transitivity of perspective mappings. Ann. Math. **41** (1940), 87—93.

Ono T.

1. Local theory of rings of operators. J. Math. Soc. Japan, I. **10** (1958), 184—216; II. **10** (1958), 438—458.

Ornstein D.

1. Dual vector spaces. Ann. Math. **69** (1959), 520—534.

Pless V.

1. The continuous transformation ring of biorthogonal basec spaces. Duke Math. J. **25** (1958), 365—371.

Pukánszky L.

1. Some examples of factors. Publs. math. **4** (1956), 135—156.
2. On maximal abelian subrings of factors of type II_1. Canad. J. Math. **12** (1960), 289—296.

Ree R.

1. On projective geometry over full matrix rings. Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 144—150.

Rosenberg A., Zelinsky D.

1. Finiteness of the injective hull. Math. Z. **70** (1959), 372—380.

Sai K.

1. О структуре идеалов коммутативного кольца главных идеалов (японск.). Rev. Kobe Univ. Mexant. Marine, 1957, 129—131.
2. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы структура идеалов некоторого кольца обладала дополнениями (японск.). Rev. Kobe Univ. Mexant. Marine, 1957, 133—134.

Sakai Sh.

1. On the group isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras. Tôhoku Math. J. **7** (1955), 87—95.

Sasaki V.

1. Об аксиомах непрерывной геометрии (японск.). Zenkoku Sugaku Danwakai **10** (1948), 303—305.
2. On an axiom of continuous geometry. J. Sci. Hiroshima Univ. **14** (1950), 100—101.
3. Lattice theoretic characterization of an affine geometry of arbitraty dimensions. J. Sci. Hiroshima Univ. **16** (1952), 223—238.
4. Lattice theoretic characterization of geometries satisfying «Axiome der Verknüpfung». J. Sci. Hiroshima Univ. **16** (1953), 417—423.
5. Lattices of projections in AW^*-algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. **19** (1955), 1—30.

Sato T.

1. Sur les traillis de Boole $*$-généraux. Proc. Japan. Acad. **36** (1960), 207—212.

Schilling O.

1. The structure of certaine rational infinite algebras. Duke Math. J. **3** (1937), 303—310.

Serre J.

1. Sur la dimension homoloque des anneaux et des modules noethériens. Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 175—189.

Smiley M.

1. Alternative regular rings without nilpotent elements. Bull. Am. Math. Soc. **53** (1947), 775—778.

Smith R.

1. A determinant in continuous rings. Pacific J. Math. **7** (1957), 1701—1702.

Teleman S.

1. Sur les algebres de J. von Neumann, Bull. sci. math. **82** (1958), 117—126.

T h i e r r i n G.

1. Sur line conditions necessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe soit une groupe. C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951), 376—378.

T o m i n a g a H., J a m a d a T.

1. On the π-regularity of certain rings. Proc. Japan. Acad. **31** (1955), 253—256.

U t u m i Yu.

1. On a theorem on modular lattices. Proc. Japan. Acad. **35** (1959), 16—21.
2. On continuous regular rings and semisimple self injective rings. Canad J. Math. **12** (1960), 597—605.

V i d a v I.

1. On some $*$-regular rings. Publs Inst. math. **13** (1959), 73—80.

V i l l a m a y o r O.

1. On wenk dimension of algebras. Pacific J. Math. 9 (1959), 941—951.

W a d d e l M.

1. Properties of regular rings. Duke Math. J. **19** (1952), 623—627.

W h i t e s i t t E.

1. Construction of a lattice of complemented ideals within the unit groups. Pacific J. Math. **6** (1956), 779—794.

W i d o m H.

1. Approximately finite algebras. Trans. Am. Math. Soc. **83** (1956), 170—178.
2. Nonisomorphic approximately finite factors. Proc. Am. Math. Soc. **8** (1957), 537—540.

W o l f s o n K.

1. An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations. Am. J. Math. **75** (1953), 358—386.

W r i g h t F.

1. A reduction for algebras of finite type. Ann. Math. **60** (1954), 560—570.
2. The ideal in a factor. Ann. Math. **68** (1958), 475—482.

Y e n Ti

1. Tracke on finite AW^*-algebras. Duke Math. J. **22** (1955), 207—222.
2. Isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras. Tôhoku Math. J. **8** (1956), 275—280.
3. Isomorphism of AW^*-algebras. Proc. Am. Math. Soc. **8** (1957). 345—349.

Z e l i n s k y D.

1. Every linear transformation is a sum of nonsingular ones. Proc. Am. Math. Soc. **5** (1954), 627—630.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Лев Анатольевич Скорняков

Дедекиндовы структуры с дополнениями
и регулярные кольца

Редактор *С. А. Широкова*
Техн. редактор *Е. А. Ермакова*
Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 6/I 1961 г. Подписано к печати 22/VI 1961 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 6,25. Условн. печ. л. 10,25. Уч.-изд. л. 10,99. Тираж 5000 экз. Т-03178. Цена книги 75 к. Заказ № 2103.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.